

Artículos completos de Srinivasa Ramanujan



Srinivasa Ramanujan · 1927

Audiolecciones ilustradas

Lecturized

Artículos completos de Srinivasa Ramanujan

Audiolecciones ilustradas

Srinivasa Ramanujan · 1927

Contado como lecciones ilustradas por Lecturized
lecturized.com

Del original: Collected Papers of Srinivasa Ramanujan, ed. G. H. Hardy, P. V. Seshu
Aiyar and B. M. Wilson (Cambridge, 1927)

Índice

Algunas propiedades de los números de Bernoulli

Sección 4

Secciones 5 a 7

Secciones 8 a 11

Sección 12

Secciones 13 a 15

Secciones 16 y 17

Sección 18 y la nota de los editores

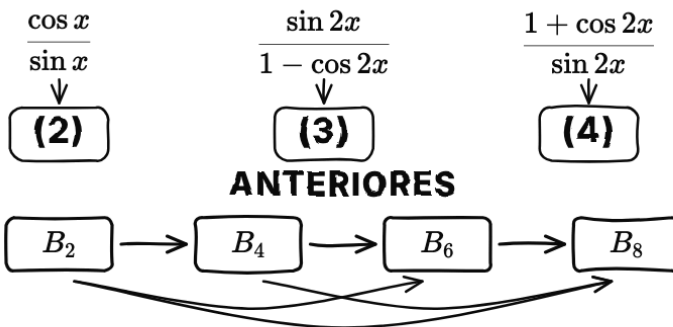
Algunas propiedades de los números de Bernoulli

Journal of the Indian Mathematical Society, volumen tres, 1911,
páginas 219 a 234.

Sección 1.

Escribamos el conocido desarrollo de $x \cot x$ (véase el Differential Calculus de Edwards, sección 149) en la forma $x \cot x = 1 - (B_2/2!)(2x)^2 - (B_4/4!)(2x)^4 - (B_6/6!)(2x)^6 - \dots$, que es la ecuación uno, de la cual inferimos que B_0 puede suponerse igual a menos uno.

Ahora bien, $\cot x = \cos x / \sin x = (1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \dots) / (x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \dots)$. También es igual a $\sin 2x / (1 - \cos 2x) = (2x/1! - (2x)^3/3! + (2x)^5/5! - \dots) / ((2x)^2/2! - (2x)^4/4! + (2x)^6/6! - \dots)$. Y es igual a $(1 + \cos 2x) / \sin 2x = (2 - (2x)^2/2! + (2x)^4/4! - \dots) / (2x - (2x)^3/3! + (2x)^5/5! - \dots)$.



$$(x \cot x)^2 = -x^2 \left(1 + \frac{d \cot x}{dx} \right)$$

$$\frac{1}{2}(n+1)B_n = c_2 B_2 B_{n-2} + c_4 B_4 B_{n-4} + \cdots \quad (5)$$

$$\frac{d \tan x}{dx} = 1 + \tan^2 x$$

Tres cocientes, tres ecuaciones

Multiplicando ambos miembros de cada una de las tres relaciones anteriores por el denominador del segundo miembro e igualando los coeficientes de x^n en ambos miembros, podemos escribir los resultados así. La primera es $c_1 B_{n-1}/2 - c_3 B_{n-3}/2^3 + c_5 B_{n-5}/2^5 - \cdots + (-1)^{((n-1)/2)} B_0/2^n + (n/2^n)(-1)^{((n-1)/2)} = 0$, ecuación dos, donde n es cualquier entero impar. La segunda es $c_2 B_{n-2} - c_4 B_{n-4} + c_6 B_{n-6} - \cdots + (-1)^{((n-2)/2)} B_0 + (n/2)(-1)^{((n-2)/2)} = 0$, ecuación tres, donde n es cualquier entero par. La tercera es $c_1 B_{n-1} - c_3 B_{n-3} + c_5 B_{n-5} - \cdots + (-1)^{((n-1)/2)} B_0 + (n/2)(-1)^{((n-1)/2)} = 0$, ecuación cuatro, donde n es cualquier entero impar mayor que la unidad.

A partir de cualquiera de las ecuaciones dos, tres y cuatro podemos calcular las B . Pero, a medida que n crece, el cálculo se vuelve tedioso.

Así que intentaremos encontrar métodos más sencillos.

Sección 2.

Sabemos que $(x \cot x)^2 = -x^2(1 + d \cot x / dx)$. Usando la ecuación uno, igualando los coeficientes de x^n en ambos miembros y simplificando, obtenemos $\frac{1}{2}(n+1) B_n = c_2 B_2 B_{n-2} + c_4 B_4 B_{n-4} + c_6 B_6 B_{n-6} + \dots$, donde el último término es $c_{(n/2-1)} B_{(n/2-1)} B_{(n/2+1)}$ o $\frac{1}{2} c_{(n/2)} (B_{(n/2)})^2$ según que $\frac{1}{2}n$ sea impar o par; este es el resultado cinco.

Un resultado semejante puede obtenerse igualando los coeficientes de x^n en la identidad $d \operatorname{tg} x / dx = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

Sección 3.

COT	B_0	B_2	B_4	B_6	B_8	B_{10}
COTH	+	-	+	-	+	-
SUMA						
RESTA						

$\frac{n}{2}$ terms

$\frac{n}{4}$ terms

Se cancela un término de cada dos

De nuevo, $-\frac{1}{2}x(\cot \frac{1}{2}x + \coth \frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2}x(\cot \frac{1}{2}x + i \cot \frac{1}{2}ix) = 2(B_0 + B_4 x^4/4! + B_8 x^8/8! + \dots)$, usando la ecuación uno. La expresión también puede escribirse $-\frac{1}{2}x (\cos \frac{1}{2}x \sen \frac{1}{2}ix + i \sen \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}ix) / (\sen \frac{1}{2}x \sen \frac{1}{2}ix)$, que es $-\frac{1}{2}x ((1 + i) \sen \frac{1}{2}x(1 + i) - (1 - i) \sen \frac{1}{2}x(1 - i)) / (\cos \frac{1}{2}x(1 - i) - \cos \frac{1}{2}x(1 + i))$, que es $-x (x/1! - x^5/(2^2 \cdot 5!) + x^9/(2^4 \cdot 9!) - \dots) / (x^2/2! - x^6/(2^2 \cdot 6!) + x^{10}/(2^4 \cdot 10!) - \dots)$, desarrollando el numerador y el denominador y simplificando mediante el teorema de De Moivre.

Por tanto $2(B_0 + B_4 x^4/4! + B_8 x^8/8! + \dots) = -x (x/1! - x^5/(2^2 \cdot 5!) + \dots) / (x^2/2! - x^6/(2^2 \cdot 6!) + \dots)$, que es la ecuación seis.

Análogamente, $-\frac{1}{2}x(\cot \frac{1}{2}x - \coth \frac{1}{2}x) = 2(B_2 x^2/2! + B_6 x^6/6! + B_{10} x^{10}/10! + \dots)$. Esto es igual a $x(\frac{1}{2}(1-i)\sin \frac{1}{2}x(1+i) - \frac{1}{2}(1+i)\sin \frac{1}{2}x(1-i)) / (\cos \frac{1}{2}x(1+i) - \cos \frac{1}{2}x(1-i))$, que es $x(x^3/(2 \cdot 3!) - x^7/(2^3 \cdot 7!) + x^{11}/(2^5 \cdot 11!) + \dots) / (x^2/2! - x^6/(2^2 \cdot 6!) + x^{10}/(2^4 \cdot 10!) - \dots)$, que es la ecuación siete.

Procediendo como en la sección 1, si n es un entero par mayor que 2, tenemos $c_2 B_{n-2}/2 - c_6 B_{n-6}/2^3 + c_{10} B_{n-10}/2^5 - \dots + (n/2^{((n+2)/2)})(-1)^{(n/4)} o (n/2^{((n+2)/2)})(-1)^{((n-2)/4)} = 0$, ecuación ocho, según que n o n menos 2 sea múltiplo de 4.

Resultados análogos pueden obtenerse a partir de $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x \pm \operatorname{tgh} \frac{1}{2}x$.

En las ecuaciones dos, tres y cuatro hay $\frac{1}{2}n$ términos, mientras que en la cinco y la ocho hay $\frac{1}{4}n$ o $\frac{1}{4}(n-2)$ términos. Así, B_n puede hallarse a partir de solo la mitad de las B anteriores.

Preguntas

1. ¿Por qué puede suponerse que B_0 vale -1 en la ecuación (1)?
 - a. Porque todo número de Bernoulli de índice par es negativo
 - b. Porque así el término constante 1 de $x \cot x$ encaja en el mismo patrón que los demás términos, $-B_0$ por $(2x)^0$ entre $0!$
 - c. Porque $\cot x$ es negativa cerca de cero
 - d. Porque B_0 debe cancelar el término con B_2
2. ¿Cómo convierte Ramanujan las tres expresiones de $\cot x$ en las ecuaciones (2), (3) y (4)?

- a. Integrando ambos miembros de 0 a x
 - b. Dando a x valores pequeños y despejando
 - c. Multiplicando cada relación por el denominador de su segundo miembro e igualando los coeficientes de x^n en ambos miembros
 - d. Tomando logaritmos en ambos miembros
3. ¿Por qué busca Ramanujan otros métodos después de las ecuaciones (2) a (4)?
- a. Porque esas ecuaciones son falsas para n grande
 - b. Porque, a medida que n crece, el cálculo se vuelve tedioso
 - c. Porque solo dan las B de índice impar
 - d. Porque necesitan el valor de π
4. ¿Qué ganan las relaciones (5) y (8) respecto de (2), (3) y (4)?
- a. Necesitan solo unos n cuartos términos en lugar de n medios, así que B_n sale de solo la mitad de las B anteriores
 - b. Dan B_n sin ninguna B anterior
 - c. Solo funcionan para n impar
 - d. Dan directamente los denominadores de las B

Respuestas

- 1. b)** La ecuación (1) escribe cada término como menos B entre un factorial por una potencia de $2x$; el primer término, 1, tiene esa forma solo si B_0 vale -1 .
- 2. c)** Al multiplicar por el denominador quedan dos series de potencias que deben coincidir término a término; igualar los coeficientes de x^n da una relación entre las B .

3. b) Cualquiera de las tres ecuaciones da las B, pero a medida que n crece el cálculo se vuelve tedioso.

4. a) En (2), (3) y (4) hay n medios términos, en (5) y (8) n cuartos o n menos 2 partido por 4, así que solo hace falta la mitad de las B anteriores.

Ejemplos resueltos

Las dos primeras B con la ecuación (3) Use la ecuación (3), con $B_0 = -1$, para $n = 4$ y $n = 6$ y halle B_2 y B_4 . Aquí c_k es el número de maneras de elegir k cosas entre n.

Para $n = 4$ los términos son $c_2 B_2$, luego el término de B_0 con signo $(-1)^{((4-2)/2)} = -1$, y luego $(4/2)$ por el mismo signo.

Con $c_2 = 6$ queda $6B_2 - B_0 - 2 = 0$, y como $B_0 = -1$, eso es $6B_2 + 1 - 2 = 0$, así que $B_2 = 1/6$.

Para $n = 6$ los coeficientes son $c_2 = 15$ y $c_4 = 15$, y el signo del término de B_0 es $(-1)^2 = +1$.

Así, $15B_4 - 15B_2 + B_0 + 3 = 0$, es decir, $15B_4 - 15/6 - 1 + 3 = 0$.

Por tanto $15B_4 = 1/2$ y $B_4 = 1/30$.

Respuesta: $B_2 = 1/6$ y $B_4 = 1/30$

Ejercicios

1. Ponga $n = 8$ en la ecuación (3) y halle B_6 , usando $B_2 = 1/6$, $B_4 = 1/30$ y $B_0 = -1$.

Pista: Los coeficientes son $c_2 = 28$, $c_4 = 70$, $c_6 = 28$, y el signo $(-1)^{((8-2)/2)}$ es -1 .

Respuesta: $B_6 = 1/42$. La ecuación es $28B_6 - 70/30 + 28/6 - B_0 - 4 = 0$, es decir, $28B_6 - 7/3 + 14/3 + 1 - 4 = 0$, así que $28B_6 = 2/3$.

2. Use el resultado (5) con $n = 4$ para hallar B_4 a partir de $B_2 = 1/6$.

Pista: La mitad de 4 es 2, que es par, así que el único término es $\frac{1}{2} c_2 (B_2)^2$, con $c_2 = 6$.

Respuesta: $B_4 = 1/30$. El resultado (5) da $\frac{1}{2} \times 5 \times B_4 = \frac{1}{2} \times 6 \times (1/6)^2 = 1/12$, así que $B_4 = 2/60 = 1/30$.

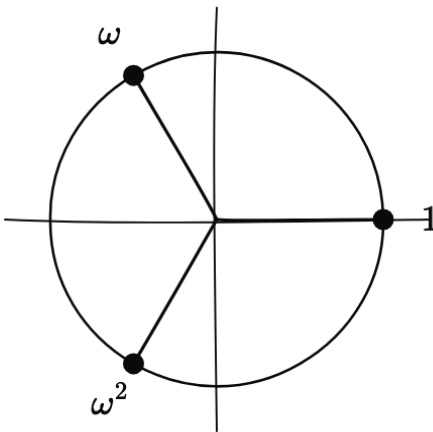
3. Compruebe numéricamente la ecuación (1) para $x = 0,1$ con sus tres primeros términos, y compare con $0,1 \cot 0,1 = 0,9966644$.

Pista: El segundo término es $(B_2/2!)(2x)^2$ con $B_2 = 1/6$; el tercero usa $B_4 = 1/30$ y $4! = 24$.

Respuesta: $1 - 0,04/12 - 0,0016/720 = 1 - 0,0033333 - 0,0000022 = 0,9966645$, que coincide con $0,9966644$ hasta la sexta cifra decimal; el término siguiente es aún más pequeño.

Sección 4

De las identidades siguientes puede deducirse un método aún más sencillo.



$$\omega^3 = 1$$

$$1 + \omega + \omega^2 = 0$$

$$-\frac{1}{2}x \left(\cot \frac{1}{2}x + \omega \cot \frac{1}{2}x\omega + \omega^2 \cot \frac{1}{2}x\omega^2 \right)$$

Las tres raíces cúbicas de la unidad

Si $1, \omega, \omega^2$ son las tres raíces cúbicas de la unidad, entonces $4 \sin x \sin x\omega \sin x\omega^2 = -(\sin 2x + \sin 2x\omega + \sin 2x\omega^2)$, como puede comprobarse fácilmente.

Por derivación logarítmica tenemos $\cot x + \omega \cot x\omega + \omega^2 \cot x\omega^2 = 2(\cos 2x + \omega \cos 2x\omega + \omega^2 \cos 2x\omega^2) / (\sin 2x + \sin 2x\omega + \sin 2x\omega^2)$.

Escribiendo $\frac{1}{2}x$ en lugar de x , $-\frac{1}{2}x(\cot \frac{1}{2}x + \omega \cot \frac{1}{2}x\omega + \omega^2 \cot \frac{1}{2}x\omega^2) = -x(\cos x + \omega \cos x\omega + \omega^2 \cos x\omega^2) / (\sin x + \sin x\omega + \sin x\omega^2)$, y, procediendo como en la sección 3, obtenemos $3(B_0 + B_6 x^6/6! + B_{12} x^{12}/12! + \dots) = -x(x^2/2! - x^8/8! + x^{14}/14! - \dots) / (x^3/3! - x^9/9! + x^{15}/15! - \dots)$, que es la ecuación nueve.

De nuevo, $\cot \frac{1}{2}x\omega - \cot \frac{1}{2}x\omega^2 = (\cos x\omega^2 - \cos x\omega) / (2 \sin \frac{1}{2}x \sin \frac{1}{2}x\omega \sin \frac{1}{2}x\omega^2) = 2(\cos x\omega - \cos x\omega^2) / (\sin x + \sin x\omega + \sin x\omega^2)$.

Multiplicando ambos miembros por $-\frac{1}{2}x(\omega^2 - \omega)$ y sumándolos a los miembros correspondientes del resultado anterior, tenemos $-\frac{1}{2}x(\cot \frac{1}{2}x + \omega^2 \cot \frac{1}{2}x\omega + \omega \cot \frac{1}{2}x\omega^2) = -x(\cos x + \omega^2 \cos x\omega + \omega \cos x\omega^2) / (\sin x + \sin x\omega + \sin x\omega^2)$.

Por tanto, como antes, $3(B_2 x^2/2! + B_8 x^8/8! + B_{14} x^{14}/14! + \dots) = x(x^4/4! - x^{10}/10! + x^{16}/16! - \dots) / (x^3/3! - x^9/9! + x^{15}/15! - \dots)$, que es la ecuación diez.

Análogamente, $-x(\cot \frac{1}{2}x + \cot \frac{1}{2}x\omega + \cot \frac{1}{2}x\omega^2) = x(\cos x + \cos x\omega + \cos x\omega^2 - 3) / (\sin x + \sin x\omega + \sin x\omega^2)$, y por tanto $6(B_4 x^4/4! + B_{10} x^{10}/10! + B_{16} x^{16}/16! + \dots) = x(x^6/6! - x^{12}/12! + x^{18}/18! - \dots) / (x^3/3! - x^9/9! + x^{15}/15! - \dots)$, que es la ecuación once.

Multiplicando por los denominadores e igualando coeficientes en las ecuaciones nueve, diez y once como de costumbre, tenemos $c_3 B_{n-3} - c_9 B_{n-9} + c_{15} B_{n-15} - \dots = 0$, la ecuación doce, donde el último término es $\frac{1}{6}n(-1)^{((n-1)/3)}$, $\frac{1}{3}n(-1)^{((n+1)/3)}$ o $\frac{1}{3}n(-1)^{(n-3)/3}$.

De nuevo, dividiendo entre x ambos miembros de la ecuación diez y derivando, tenemos $3(B_2/2! + 7B_8 x^6/8! + 13B_{14} x^{12}/14! + \dots) = d/dx$ de $(x^4/4! - x^{10}/10! + x^{16}/16! - \dots) / (x^3/3! - x^9/9! + x^{15}/15! - \dots)$,

que es igual a $1 - (x^2/2! - x^8/8! + x^{14}/14! - \dots)(x^4/4! - x^{10}/10! + x^{16}/16! - \dots) / (x^3/3! - x^9/9! + x^{15}/15! - \dots)^2$.

Por tanto, por las ecuaciones nueve y diez, $3(B_2 x^2/2! + 7B_8 x^8/8! + 13B_{14} x^{14}/14! + \dots) = x^2 + 9(B_0 + B_6 x^6/6! + B_{12} x^{12}/12! + \dots)(B_2 x^2/2! + B_8 x^8/8! + B_{14} x^{14}/14! + \dots)$.

Igualando los coeficientes de x^n tenemos, si n es mayor que 2 y n menos 2 es múltiplo de 6, $\frac{1}{3}(n + 2) B_n = c_6 B_{n-6} B_6 + c_{12} B_{n-12} B_{12} + c_{18} B_{n-18} B_{18} + \dots$, que es la ecuación trece.

Con la ecuación doce las B pueden calcularse muy deprisa, y la ecuación trece puede resultar útil para comprobar los cálculos. El número de términos es la tercera parte del de la ecuación cuatro; así, B_{24} se halla a partir de B_{18} , B_{12} y B_6 .

Preguntas

1. ¿Qué se consigue con el uso de las tres raíces cúbicas de la unidad en la sección 4?
 - a. Que las B sean enteras
 - b. Separar las B en tres clases espaciadas de seis en seis, de modo que cada ecuación conserva solo una B de cada seis índices
 - c. Que ya no haga falta comparar coeficientes
 - d. Obtener las B de índice impar
2. ¿Qué ecuación dice Ramanujan que calcula las B muy deprisa, y cuál sirve para comprobar?

- a. La ecuación trece las calcula y la doce comprueba
 - b. La ecuación doce las calcula y la trece es útil para comprobar
 - c. Ambas solo comprueban resultados anteriores
 - d. La ecuación cuatro las calcula y la doce comprueba
3. ¿A partir de qué B anteriores se halla B₂₄ con el método nuevo?
- a. De todas, desde B₂ hasta B₂₂
 - b. De B₁₈, B₁₂ y B₆
 - c. Solo de B₂₂
 - d. Solo de B₁₂

Respuestas

1. **b)** Las ecuaciones nueve, diez y once conservan, respectivamente, B₀, B₆, B₁₂...; B₂, B₈, B₁₄...; y B₄, B₁₀, B₁₆....
2. **b)** Con la ecuación doce las B pueden calcularse muy deprisa, y la ecuación trece puede resultar útil para comprobar los cálculos.
3. **b)** El número de términos es la tercera parte del de la ecuación cuatro; así, B₂₄ se halla a partir de B₁₈, B₁₂ y B₆.

Ejemplos resueltos

Comprobación de la ecuación trece para n = 8 La ecuación trece vale cuando $n - 2$ es múltiplo de 6. Úsela con $n = 8$, $B_2 = 1/6$ y $B_6 = 1/42$ para hallar B₈.

Para $n = 8$ solo aparece el primer término del segundo miembro: $c_6 B_2 B_6$, donde c_6 es el número de maneras de elegir 6 entre 8, que es 28.

El segundo miembro es $28 \times 1/6 \times 1/42 = 28/252 = 1/9$.

El primer miembro es $\frac{1}{3}(8 + 2) B_8 = (10/3) B_8$.

Así que $B_8 = (1/9) \times (3/10) = 1/30$.

Respuesta: $B_8 = 1/30$

Ejercicios

1. Compruebe el término principal de la ecuación nueve: para x muy pequeño, ¿a qué tiende el segundo miembro $-x (x^2/2! - \dots) / (x^3/3! - \dots)$, y qué dice eso de B_0 ?

Pista: Quédese solo con el primer término del numerador y del denominador.

Respuesta: Tiende a $-x (x^2/2) / (x^3/6) = -3$, y el primer miembro tiende a $3B_0$, así que $B_0 = -1$, como en la sección 1.

2. Compruebe del mismo modo el término principal de la ecuación diez y halle B_2 .

Pista: El segundo miembro empieza por $x (x^4/24) / (x^3/6)$; el primero, por $3 B_2 x^2/2$.

Respuesta: El segundo miembro es $x^2/4$, así que $3B_2/2 = 1/4$ y $B_2 = 1/6$.

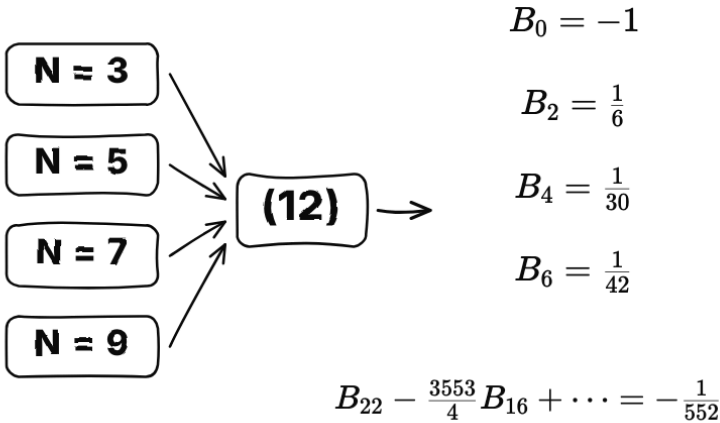
3. Compruebe el término principal de la ecuación once y halle B_4 .

Pista: El segundo miembro empieza por $x (x^6/720) / (x^3/6)$; el primero, por $6 B_4 x^4/24$.

Respuesta: El segundo miembro es $x^4/120$ y el primero $B_4 x^4/4$, así que $B_4 = 1/30$.

Secciones 5 a 7

Sección 5.

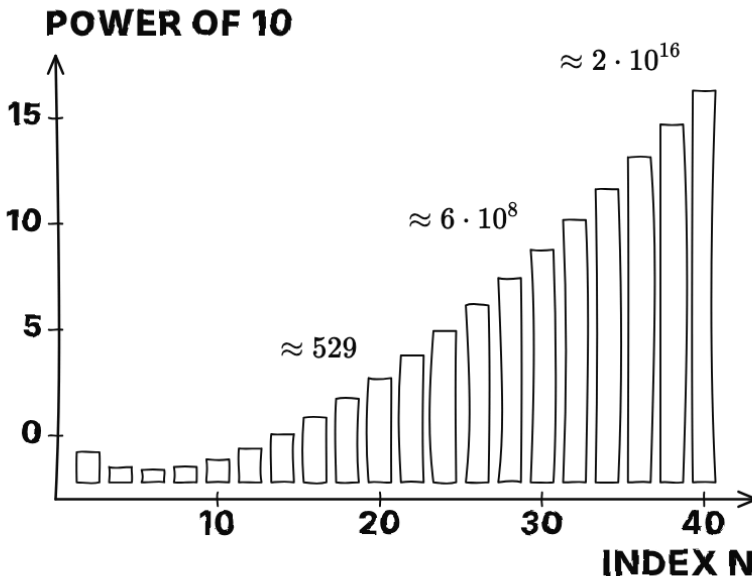


$n = 3, 5, 7, \dots$ en la ecuación (12)

Más adelante veremos cómo pueden obtenerse las B a partir de sus propiedades solamente. Pero para conocer estas propiedades convendrá calcular algunas B substituyendo sucesivamente n por 3, 5, 7, 9, etcétera, en la ecuación doce. Así, $B_0 = -1$; $B_2 = 1/6$; $B_4 = 1/30$; $B_6 = 1/42$; $B_8 - \frac{1}{3}B_2 = -1/45$. Después, $B_{10} - (5/2)B_4 = -1/132$; $B_{12} - 11B_6 = -4/455$; $B_{14} - (143/4)B_8 + B_2/5 = 1/120$. Después, $B_{16} - (286/3)B_{10} + 4B_4 = 1/306$; $B_{18} - 221B_{12} + (204/5)B_6 = 3/665$.

Luego, $B_{20} - (3230/7)B_{14} + (1938/7)B_8 - B_2/7 = -1/231$. Y $B_{22} - (3553/4)B_{16} + (7106/5)B_{10} - (11/2)B_4 = -1/552$, y así sucesivamente.

Por tanto tenemos finalmente los valores siguientes: $B_2 = 1/6$; $B_4 = 1/30$; $B_6 = 1/42$; $B_8 = 1/30$; $B_{10} = 5/66$; $B_{12} = 691/2730$. Luego, $B_{14} = 7/6$; $B_{16} = 3617/510$; $B_{18} = 43867/798$; $B_{20} = 174611/330$; $B_{22} = 854513/138$. Luego, $B_{24} = 236364091/2730$; $B_{26} = 8553103/6$; $B_{28} = 23749461029/870$. Luego, $B_{30} = 8615841276005/14322$; $B_{32} = 7709321041217/510$; $B_{34} = 2577687858367/6$. Luego, $B_{36} = 26315271553053477373/1919190$; $B_{38} = 2929993913841559/6$. Y $B_{40} = 261082718496449122051/13530$, y así sucesivamente, con $B_{\infty} = \infty$.



Pequeños al principio, luego enormes

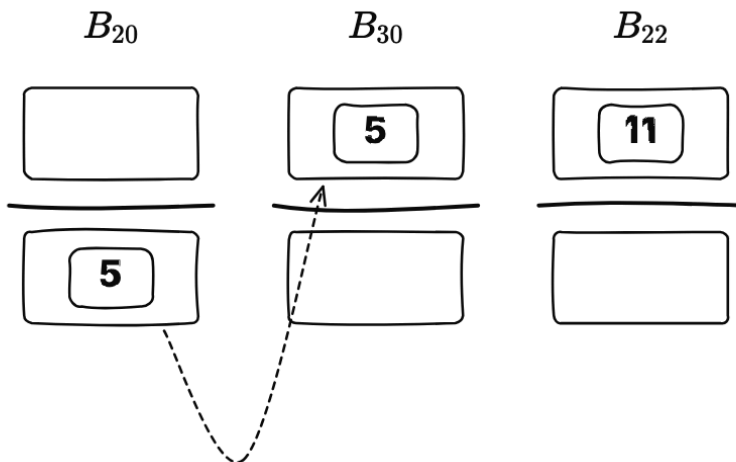
Sección 6.

Se observará que, si n es par pero distinto de cero, se cumple lo siguiente. Primero, B_n es una fracción y el numerador de B_n/n reducida a su mínima expresión es un número primo; esta es la afirmación catorce. Segundo, el denominador de B_n contiene cada uno de los factores 2 y 3 una vez y solo una; esta es la afirmación quince. Tercero, $2^n(2^n - 1)B_n/n$ es un entero y, en consecuencia, $2(2^n - 1)B_n$ es un entero impar; esta es la afirmación dieciséis.

A partir de la afirmación dieciséis puede demostrarse fácilmente que el denominador de $2(2^n - 1)B_n/n$ reducida a su mínima expresión es la mayor potencia de 2 que divide a n ; y, en consecuencia, si n no es múltiplo de 4, entonces $4(2^n - 1)B_n/n$ es un entero impar; esta es la afirmación diecisiete.

De la afirmación catorce se sigue que el numerador de B_n reducido a su mínima expresión es divisible por el mayor divisor de n primo con el denominador, y que el cociente es un número primo; esta es la afirmación dieciocho.

Ejemplos. Primero, 2 y 3 son los únicos factores primos de 12, 24 y 36, y se encuentran en los denominadores de B_{12} , B_{24} y B_{36} , y sus numeradores son números primos.



Un primo sube o baja

Segundo, 11 no se encuentra en el denominador de B_{22} y, por tanto, su numerador es divisible por 11; análogamente, los numeradores de B_{26} , B_{34} y B_{38} son divisibles por 13, 17 y 19 respectivamente, y los cocientes son en todos los casos números primos.

Tercero, 5 se encuentra en el denominador de B_{20} y no en el de B_{30} y, en consecuencia, el numerador de B_{30} es divisible por 5, mientras que el de B_{20} es un número primo. Así, podemos decir que si un número primo que aparece en n no se encuentra en el denominador, aparecerá en el numerador, y viceversa.

Sección 7.

$$B_{24} = \frac{236364091}{2730}$$

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 8 & 12 & 24 \\ \downarrow +1 & & & & & & & & \\ 2 & 3 & \cancel{4} & 5 & 7 & \cancel{9} & 13 & \cancel{25} & \end{array}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 2730$$

$$B_2 : 6$$

$$B_{20} : 330$$

$$B_{12} : 2730$$

$$B_{30} : 14322$$

Cómo se construye el denominador de B24

Consideremos ahora los denominadores.

Todos los denominadores son divisibles por 6; los de B₄, B₈, B₁₂, etcétera, por 5; los de B₆, B₁₂, B₁₈, etcétera, por 7; los de B₁₀, B₂₀, B₃₀, etcétera, por 11; pero los de B₈, B₁₆, B₂₄, etcétera, no son divisibles por 9; y los de B₁₄, B₂₈, etcétera, no son divisibles por 15. Por tanto, podemos inferir que el denominador de B_n es el producto continuado de los números primos que son los números siguientes, en el orden natural, a los divisores de n, incluidos la unidad y el propio número; esta es la afirmación diecinueve.

Tomemos como ejemplo el denominador de B₂₄. Escribimos todos los divisores de 24, a saber, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24. Los números

siguientes a estos son 2, 3, 4, 5, 7, 9, 13 y 25. Tachamos los números compuestos y nos quedan los números primos 2, 3, 5, 7 y 13. Y el denominador de B_{24} es el producto de 2, 3, 5, 7 y 13, es decir, 2730.

No es necesario escribir los divisores impares de n , salvo la unidad, porque los números siguientes a ellos son pares y, por tanto, compuestos.

Siguen algunos ejemplos más, con los divisores pares de n junto con la unidad, y el denominador. Para B_2 : 1 y 2, que dan 2 por 3, es decir, 6. Para B_6 : 1, 2 y 6, que dan 2 por 3 por 7, es decir, 42. Para B_{12} : 1, 2, 4, 6 y 12, que dan 2 por 3 por 5 por 7 por 13, es decir, 2730. Para B_{20} : 1, 2, 4, 10 y 20, que dan 2 por 3 por 5 por 11, es decir, 330. Para B_{30} : 1, 2, 6, 10 y 30, que dan 2 por 3 por 7 por 11 por 31, es decir, 14322. Para B_{42} : 1, 2, 6, 14 y 42, que dan 2 por 3 por 7 por 43, es decir, 1806. Para B_{56} : 1, 2, 4, 8, 14, 28 y 56, que dan 2 por 3 por 5 por 29, es decir, 870. Para B_{72} : 1, 2, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 36 y 72, que dan 2 por 3 por 5 por 7 por 13 por 19 por 37 por 73, es decir, 140100870. Para B_{90} : 1, 2, 6, 10, 18, 30 y 90, que dan 2 por 3 por 7 por 11 por 19 por 31, es decir, 272118. Para B_{110} : 1, 2, 10, 22 y 110, que dan 2 por 3 por 11 por 23, es decir, 1518.

Preguntas

1. ¿Por qué calcula Ramanujan una tabla de las B en la sección 5?
 - a. Para mostrar que la ecuación doce es errónea
 - b. Porque, para conocer las propiedades de las B , conviene tener antes unos cuantos valores
 - c. Porque las B no pueden obtenerse de ninguna otra manera

- d. Para hallar el valor de π
2. Según la afirmación quince, ¿qué puede decirse del denominador de B_n ?
- a. Que siempre es primo
 - b. Que contiene cada uno de los factores 2 y 3 una vez y solo una
 - c. Que siempre es una potencia de 2
 - d. Que es igual a $n + 1$
3. ¿Cómo describe la afirmación diecinueve el denominador de B_n ?
- a. Como el producto de los primos que son uno más que un divisor de n , incluidos la unidad y n
 - b. Como el producto de todos los primos menores que n
 - c. Como n factorial
 - d. Como el cuadrado de n
4. ¿Por qué no hace falta escribir los divisores impares de n , salvo la unidad?
- a. Porque los divisores impares nunca dividen a n
 - b. Porque los números siguientes a los divisores impares son pares y, por tanto, compuestos
 - c. Porque dan el numerador en su lugar
 - d. Porque siempre son primos

Respuestas

1. b) Dice que, para conocer estas propiedades, convendrá calcular algunas B substituyendo n por 3, 5, 7, 9, ... en la ecuación doce.

- 2. b)** Afirmación quince: el denominador de B_n contiene cada uno de los factores 2 y 3 una vez y solo una.
- 3. a)** El denominador es el producto continuado de los números primos que son los números siguientes a los divisores de n , incluidos la unidad y el propio número.
- 4. b)** El número siguiente a un divisor impar es par y, por tanto, compuesto, así que nunca aporta un primo al denominador.

Ejemplos resueltos

El denominador de B_{24} Use la afirmación diecinueve para hallar el denominador de B_{24} .

Escriba todos los divisores de 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

Sume uno a cada uno: 2, 3, 4, 5, 7, 9, 13, 25.

Tache los compuestos 4, 9 y 25; quedan los primos 2, 3, 5, 7, 13.

Multiplíquelos: $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 = 2730$.

Respuesta: 2730

Ejercicios

- 1.** Use la afirmación diecinueve para hallar el denominador de B_{20} .

Pista: La unidad y los divisores pares de 20 son 1, 2, 4, 10, 20; sume uno a cada uno.

Respuesta: 330: los números siguientes son 2, 3, 5, 11, 21; al tachar 21 quedan 2, 3, 5, 11, cuyo producto es 330, como en la tabla.

- 2.** A partir de la ecuación $B_{10} - (5/2)B_4 = -1/132$ y de $B_4 = 1/30$, halle B_{10} .

Pista: Cinco medios de un treintavo es un doceavo.

Respuesta: $B_{10} = 1/12 - 1/132 = 10/132 = 5/66$.

3. Compruebe la afirmación dieciséis para $n = 4$: ¿es $2^4(2^4 - 1)B_4/4$ un entero, y es $2(2^4 - 1)B_4$ impar?

Pista: Use $B_4 = 1/30$ y $2^4 - 1 = 15$.

Respuesta: Sí: $16 \times 15 \times (1/30) / 4 = 2$, un entero, y $2 \times 15 \times (1/30) = 1$, un entero impar.

Secciones 8 a 11

Sección 8.

fractional part of B_n

$$B_{16} : \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17} - 1 = \frac{47}{510}$$

$$B_{22} : 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{23} = \frac{17}{138}$$

$$B_{28} : \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{29} - 1 = \frac{59}{870}$$

Partes fraccionarias a partir de primos

De nuevo, tomando la parte fraccionaria de cualquier B y descomponiéndola en fracciones simples, vemos que la parte fraccionaria de B_n es igual a $(-1)^{(n/2)}$ por la suma de los inversos de los factores primos del denominador de B_n , menos $(-1)^{(n/2)}$; esta es la afirmación veinte.

Así, la parte fraccionaria de $B_{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17} - 1 = \frac{47}{510}$; la de $B_{22} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{23} = \frac{17}{138}$; la de $B_{28} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{29} -$

$1 = 59/870$; y así sucesivamente.

Sección 9.

De la afirmación veinte puede inferirse que, si G es el m.c.d. y L el m.c.m. de los denominadores de B_m y B_n , entonces L/G es el denominador de $B_m - (-1)^{((m-n)/2)} B_n$ y, por tanto, si los denominadores de B_m y B_n son iguales, entonces $B_m - (-1)^{((m-n)/2)} B_n$ es un entero; esta es la afirmación veintiuno.

Ejemplo: $B_{24} - B_{12}$ y $B_{32} - B_{16}$ son enteros, mientras que el denominador de $B_{10} + B_{20}$ es 5.

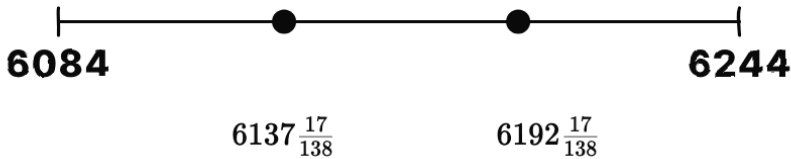
Se observará que se cumple lo siguiente. Primero, si n es múltiplo de 4, entonces el numerador de $B_n - 1/30$ reducido a su mínima expresión es divisible por 20; pero si n no es múltiplo de 4, entonces el de $B_n/n - 1/12$ reducido a su mínima expresión es divisible por 5; esta es la afirmación veintidós. Segundo, si n es un entero cualquiera, entonces $2(2^{4n+2} - 1)B_{4n+2}/(2n + 1)$, $2(2^{8n+4} - 1)B_{8n+4}/(2n + 1)$ y $2(2^{8n+4} - 1)B_{16n+8}/(2n + 1)$ son enteros de la forma $30p + 1$; esta es la afirmación veintitrés.

Sección 10.

$$\frac{17}{138}$$

$$11 \mid \text{top}$$

$$5 \mid B - \frac{11}{6}$$



$$B_{22} = \frac{854513}{138}$$

Cómo se fija B22

Si se sabe que una B está entre ciertos límites, entonces es posible hallar su valor exacto a partir de las propiedades anteriores.

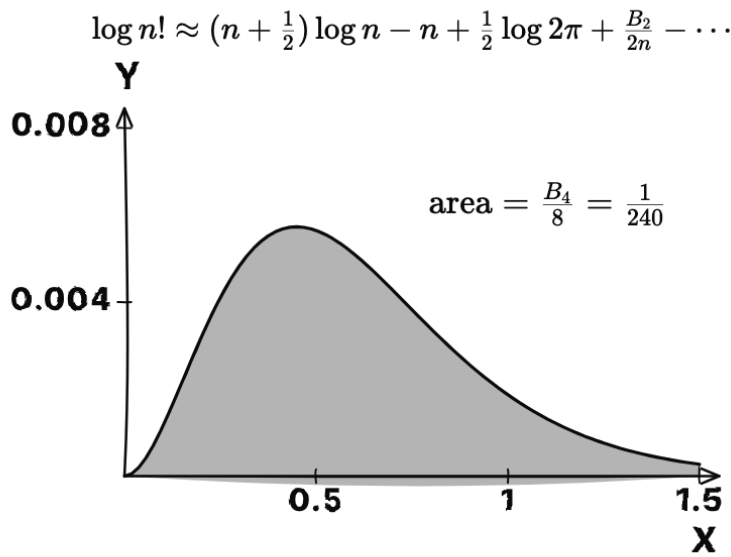
Supongamos que sabemos que B22 está entre 6084 y 6244; su valor exacto puede hallarse como sigue.

La parte fraccionaria de B22 es $17/138$ por la afirmación veinte; además, B22 es divisible por 11 por la afirmación dieciocho. Y por la afirmación veintidós, $B_{22} - 11/6$ debe ser divisible por 5. Para cumplir estas condiciones, B22 debe ser $6137 \frac{17}{138}$ o bien $6192 \frac{17}{138}$.

Pero según la afirmación dieciocho el numerador de B22, una vez dividido entre 11, debería ser un número primo; y, en consecuencia, B22 debe ser igual a $6192 \frac{17}{138}$, o sea $854513/138$, ya que el

numerador de $6137\ 17/138$ es divisible no solo por 11 sino también por 7 y por 17.

Sección 11.



Un área igual a B4/8

Se sabe, por el Differential Calculus de Edwards, capítulo cinco, ejemplo 29, que $B_n = (2 \cdot n!/(2\pi)^n)(1/1^n + 1/2^n + 1/3^n + \cdots)$, o bien $2 \cdot n!/(2\pi)^n = B_n(1 - 1/2^n)(1 - 1/3^n)(1 - 1/5^n)\cdots$, la ecuación veinticuatro, donde 2, 3, 5, etcétera, son números primos.

Además, $B_n/(2n) = \int_0^\infty x^{n-1}/(e^{(2\pi x)} - 1) \, dx$, la ecuación veinticinco. Pues $\int_0^\infty x^{n-1}/(e^{(2\pi x)} - 1) \, dx = \int_0^\infty x^{n-1}(e^{(-2\pi x)} + e^{(-4\pi x)} + \cdots) \, dx = ((n - 1)!/(2\pi)^n)(1/1^n + 1/2^n + 1/3^n + \cdots) = B_n/(2n)$, por la ecuación veinticuatro. De modo análogo, $\int_0^\infty$

$x^n/(e^{(\pi x)} - e^{(-\pi x)})^2 dx = B_n/(4\pi)$, y $\int_0^\infty x^{n-2} \log(1 - e^{(-2\pi x)}) dx = -\pi B_n/(n(n-1))$, la ecuación veintiséis.

Tomemos logaritmos en ambos miembros de la ecuación veinticuatro y escribamos para $\log_e n!$ el conocido desarrollo de $\log_e \Gamma(n+1)$, como en la Synopsis de Carr, a saber $(n + 1/2) \log n - n + 1/2 \log 2\pi + B_2/(1 \cdot 2n) - B_4/(3 \cdot 4n^3) + B_6/(5 \cdot 6n^5) - \dots - (-1)^p B_{2p}\theta/((2p-1)2p n^{(2p-1)})$, la ecuación veintisiete, donde theta está entre 0 y 1.

Aquí $B_{2p}\theta/((2p-1)2p n^{(2p-1)}) = B_{2p}/((2p-1)2p n^{(2p-1)}) - B_{2p+2}/((2p+1)(2p+2)n^{(2p+1)}) + \dots$. Esto es igual a $-(1/\pi) \int_0^\infty (x^{(2p-2)}/n^{(2p-1)}) \log(1 - e^{(-2\pi x)}) dx + (1/\pi) \int_0^\infty (x^{(2p)}/n^{(2p+1)}) \log(1 - e^{(-2\pi x)}) dx - \dots$. Agrupando los términos, es igual a $-(1/\pi) \int_0^\infty (x^{(2p-2)}/(n^{(2p-3)}(n^2 + x^2))) \log(1 - e^{(-2\pi x)}) dx$, que es $-\int_0^\infty x^{(2p-2)} \log(1 - e^{(-2\pi nx)}) / (\pi(1 + x^2)) dx$.

Podemos hallar la parte entera de B_n y, como la parte fraccionaria puede hallarse, como se mostró en la sección 8, el valor exacto de B_n queda conocido. A menos que el cálculo se haga depender de los valores de $\log_{10} e$, $\log_e 10$, π , etcétera, que se conocen con un gran número de decimales, tendríamos que hallar los logaritmos de ciertos números cuyos valores no figuran en las tablas con tantos decimales como necesitamos. Estas dificultades se eliminan con el método que se da en la sección 13.

Preguntas

1. Según la afirmación veinte, ¿de qué está hecha la parte fraccionaria de B_n ?

- a. De los inversos de todos los divisores de n
 - b. De la suma de los inversos de los factores primos de su denominador, menos uno, con el signo $(-1)^{(n/2)}$
 - c. Del numerador dividido entre n
 - d. De la raíz cuadrada del denominador
2. ¿Por qué $B_{24} - B_{12}$ es un entero, según la afirmación veintiuno?
- a. Porque ambos son enteros
 - b. Porque sus denominadores son iguales, así que L/G vale 1
 - c. Porque 24 es el doble de 12
 - d. Porque ambos numeradores son primos
3. En la sección 10, ¿qué condiciones reducen B_{22} a dos candidatos?
- a. Su parte fraccionaria $17/138$, la divisibilidad del numerador por 11, y que $B_{22} - 11/6$ sea divisible por 5
 - b. Su valor de π y su logaritmo
 - c. Solo la tabla de denominadores
 - d. La integral de la ecuación veinticinco
4. ¿Con qué relaciona B_n la ecuación veinticuatro?
- a. Con la suma de los inversos de las potencias n -ésimas de los números enteros
 - b. Con la cantidad de primos menores que n
 - c. Con la derivada de $\cot x$ en cero
 - d. Con las cifras de π

Respuestas

1. b) Al descomponer la parte fraccionaria en fracciones simples, es igual a $(-1)^{(n/2)}$ por la suma de los inversos de los factores primos del denominador, menos $(-1)^{(n/2)}$.

2. b) Si los denominadores de B_m y B_n son iguales, entonces $B_m - (-1)^{((m-n)/2)} B_n$ es un entero; B_{24} y B_{12} tienen ambos denominador 2730.

3. a) La parte fraccionaria es $17/138$ por la afirmación veinte, el numerador es divisible por 11 por la afirmación dieciocho, y $B_{22} - 11/6$ debe ser divisible por 5 por la afirmación veintidós.

4. a) $B_n = (2 \cdot n! / (2\pi)^n) (1/1^n + 1/2^n + 1/3^n + \dots)$, que también puede escribirse como un producto sobre los primos.

Ejemplos resueltos

Cómo hallar B_{22} a partir de límites Supongamos que B_{22} está entre 6084 y 6244. Use la parte fraccionaria $17/138$, la divisibilidad del numerador por 11 y la regla de que $B_{22} - 11/6$ es divisible por 5 para hallar los candidatos.

Escriba $B_{22} = k + 17/138$, con k un número entero entre 6084 y 6243; su numerador es $138k + 17$.

Conserve solo los k para los que $138k + 17$ es divisible por 11 y el numerador de $B_{22} - 11/6$ es divisible por 5.

Quedan exactamente dos: $k = 6137$ y $k = 6192$.

El libro descarta entonces $6137/138$, cuyo numerador 846923 es divisible por 7 y por 17 además de por 11, y se queda con $6192/138 = 854513/138$.

Respuesta: $B_{22} = 854513/138$, como en la tabla

Ejercicios

1. Compruebe la afirmación veinte para $B_{16} = 3617/510$: calcule $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17} - 1$ y compárelo con la parte fraccionaria de B_{16} .

Pista: Ponga todo con denominador 510.

Respuesta: $(255 + 170 + 102 + 30 - 510)/510 = 47/510$, y $3617/510 = 7 + 47/510$, así que coinciden.

2. Compruebe la afirmación veintidós para $n = 12$: ¿es el numerador de $B_{12} - 1/30$ divisible por 20?

Pista: Escriba $1/30$ como $91/2730$.

Respuesta: Sí: $691/2730 - 91/2730 = 600/2730 = 20/91$, cuyo numerador es 20.

3. Compruebe la primera expresión de la afirmación veintitrés para $n = 1$: ¿es $2(2^6 - 1)B_6/3$ de la forma $30p + 1$?

Pista: Use $B_6 = 1/42$ y $2^6 - 1 = 63$.

Respuesta: Sí: $2 \times 63 \times (1/42)/3 = 1$, que es $30 \times 0 + 1$.

Sección 12

Los resultados catorce a diecisiete, veinte y veintiuno pueden obtenerse como sigue. Tenemos $1/(2x^2) + 1/(x + 1)^2 + 1/(x + 2)^2 + 1/(x + 3)^2 + 1/(x + 4)^2 + \cdots - 1/x - 1/(6(x^3 - x)) + 1/(5(x^5 - x)) + 1/(7(x^7 - x)) + 1/(11(x^{11} - x)) + \cdots = 1/x^{15} - 7/x^{17} + 55/x^{19} - 529/x^{21} + \cdots$, la ecuación veintiocho, donde 5, 7, 11, 13, etcétera, son los números primos mayores que 3. Si podemos demostrar que el primer miembro de la ecuación veintiocho puede desarrollarse en potencias ascendentes de $1/x$ con coeficientes enteros, entonces las afirmaciones veinte y veintiuno se deducen de inmediato como sigue.

SI PODEMOS DEMOSTRAR

PRIMER MIEMBRO DE (28)

¿ENTEROS?

$$\frac{1}{x^{15}} - \frac{7}{x^{17}} + \frac{55}{x^{19}} - \frac{529}{x^{21}} + \cdots$$

Una afirmación sobre una serie

De la ecuación veintisiete tenemos $d^2 \log \Gamma(n+1)/dn^2 = 1/(n+1)^2 + 1/(n+2)^2 + 1/(n+3)^2 + \dots = 1/n - 1/(2n^2) + B_2/n^3 - B_4/n^5 + B_6/n^7 - B_8/n^9 + \dots - (-1)^p B_{2p}/n^{(2p+1)}$, la ecuación veintinueve.

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{(n+k)^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{B_2}{n^3} - \frac{B_4}{n^5} + \dots$$

$$\text{rest} = \int_0^\infty \frac{\pi x^{2p} dx}{(1+x^2) \sinh^2 \pi n x}$$

ENTEROS; AQUÍ TODAS LAS B > 0

$$B_2 - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$$

$$-B_4 - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = -\frac{1}{30} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = 0$$

$$B_6 - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{1}{42} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = 0$$

$$-B_8 - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = -\frac{1}{30} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = 0$$

$$B_{10} - \frac{1}{6} + \frac{1}{11} = \frac{5}{66} - \frac{1}{6} + \frac{1}{11} = 0$$

$$-\frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1$$

Los coeficientes que deben ser enteros

Aquí $B_{2p}/n^{(2p+1)} = B_{2p}/n^{(2p+1)} - B_{2p+2}/n^{(2p+3)} + \dots$. Esto es igual a $4\pi \int_0^\infty x^{(2p)}/(n^{(2p+1)}(e^{(\pi x)} - e^{(-\pi x)})^2) dx - 4\pi \int_0^\infty x^{(2p+2)}/(n^{(2p+3)}(e^{(\pi x)} - e^{(-\pi x)})^2) dx + \dots$. Es decir, $\pi \int_0^\infty (x^{(2p)}/n^{(2p+1)} - x^{(2p+2)}/n^{(2p+3)} + \dots) dx / \sinh^2 \pi x$. Y eso es $\pi \int_0^\infty x^{(2p)}/(n^{(2p-1)}(n^2 + x^2)) dx / \sinh^2 \pi x = \int_0^\infty \pi x^{(2p)} / ((1 + x^2) \sinh^2 \pi n x) dx$.

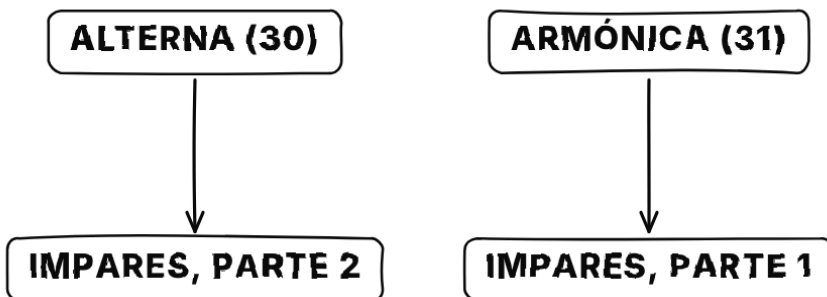
Sustituyendo el resultado de la ecuación veintinueve en la ecuación veintiocho, vemos que $B_2/x^3 - B_4/x^5 + B_6/x^7 - \dots - 1/(6(x^3 - x)) +$

$1/(5(x^5 - x)) + 1/(7(x^7 - x)) + 1/(11(x^{11} - x)) + \dots$, donde 5, 7, 11, etcétera, son números primos, puede desarrollarse en potencias ascendentes de $1/x$ con coeficientes enteros.

Por tanto, $B_2 - \frac{1}{6}$, $-B_4 - \frac{1}{6} + \frac{1}{5}$, $B_6 - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$, $-B_8 - \frac{1}{6} + \frac{1}{5}$, $B_{10} - \frac{1}{6} + \frac{1}{11}$, etcétera, que son los coeficientes de $1/x^3$, $1/x^5$, $1/x^7$, etcétera, son enteros.

Escribiendo $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1$ en lugar de $-\frac{1}{6}$ obtenemos los resultados de las afirmaciones veinte y veintiuno.

De nuevo, cambiando n por $\frac{1}{2}n$ en la ecuación veintinueve y restando la mitad del resultado de la ecuación veintinueve, tenemos $\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} - \dots = \frac{1}{(2n^2)} - (2^2 - 1)B_2/n^3 + (2^4 - 1)B_4/n^5 - (2^6 - 1)B_6/n^7 + \dots + (-1)^p (2^{2p} - 1)B_{2p}\theta/n^{(2p+1)}$, la ecuación treinta, donde θ está entre 0 y 1, y además, por la ecuación veintinueve, $(2^{2p} - 1)B_{2p}\theta/n^{(2p+1)} = \int_0^\infty \pi x^{(2p)} \cosh \pi x / ((1 + x^2) \sinh^2 \pi x) dx$.



SI PODEMOS DEMOSTRAR SI PODEMOS DEMOSTRAR

Dos caminos más, el mismo hueco

Así vemos que, si podemos demostrar que el doble del primer miembro de la ecuación treinta puede desarrollarse en potencias ascendentes de $1/n$ con coeficientes enteros, entonces la segunda parte de la afirmación dieciséis queda demostrada de inmediato.

De nuevo, de la ecuación veintisiete tenemos $d \log \Gamma(n+1)/dn = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots + 1/n - \gamma = \log n + 1/(2n) - B_2/(2n^2) + B_4/(4n^4) - B_6/(6n^6) + B_8/(8n^8) - \dots + (-1)^p B_{2p}\theta/(2p n^{(2p)})$, la ecuación treinta y uno, donde θ está entre 0 y 1; y además, por la ecuación veinticinco, $B_{2p}\theta/(2p n^{(2p)}) = \int_0^\infty 2x^{(2p-1)} / ((1+x^2)(e^{(2\pi nx)} - 1)) dx$, de donde puede demostrarse fácilmente que $1/(n+2) - 1/(n+4) + 1/(n+6) - 1/(n+8) + 1/(n+10) - \dots = 1/(2n) - 2(2^2 - 1)B_2/(2n^2) + 2^3(2^4 - 1)B_4/(4n^4) - 2^5(2^6 - 1)B_6/(6n^6) + \dots + (-1)^p$

$2^{(2p-1)}(2^{(2p)} - 1)B_{2p}\theta/(2p n^{(2p)}) - \dots$, la ecuación treinta y dos, donde θ está entre 0 y 1; y además, por la ecuación treinta y uno, $2^{(2p-1)}(2^{(2p)} - 1)B_{2p}\theta/(2p n^{(2p)}) = \int_0^\infty x^{(2p-1)}/(2(1+x^2) \sinh(\frac{1}{2}\pi nx)) dx$.

Del teorema anterior vemos que, si podemos demostrar que $2(1/(n+2) - 1/(n+4) + 1/(n+6) - \dots)$ puede desarrollarse en potencias ascendentes de $1/n$ con coeficientes enteros, entonces la primera parte de la afirmación dieciséis se sigue de inmediato.

Preguntas

1. ¿De qué única afirmación hace depender Ramanujan las afirmaciones veinte y veintiuno en la sección 12?
 - a. De que el primer miembro de la ecuación veintiocho puede desarrollarse en potencias ascendentes de $1/x$ con coeficientes enteros
 - b. De que todos los números de Bernoulli son enteros
 - c. De que π es irracional
 - d. De que la ecuación doce no tiene solución
2. ¿Qué cantidades concluye Ramanujan que son enteras?
 - a. $B_2 - \frac{1}{6}$, $-B_4 - \frac{1}{6} + \frac{1}{5}$, $B_6 - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$, etcétera, los coeficientes de $1/x^3$, $1/x^5$, $1/x^7$
 - b. Los propios números de Bernoulli
 - c. Los valores de θ
 - d. Las integrales de la ecuación veinticinco

3. ¿Qué demostraría la segunda parte de la afirmación dieciséis, según la sección 12?
- a. Que el doble del primer miembro de la ecuación treinta puede desarrollarse en potencias ascendentes de $1/n$ con coeficientes enteros
 - b. Que se cumple la ecuación veinticuatro
 - c. Que el denominador de toda B es 6
 - d. Que la serie de la ecuación treinta y dos converge

Respuestas

1. a) Si podemos demostrar que el primer miembro de la ecuación veintiocho puede desarrollarse en potencias ascendentes de $1/x$ con coeficientes enteros, entonces las afirmaciones veinte y veintiuno se deducen de inmediato.

2. a) Por tanto, $B_2 - \frac{1}{6}$, $-B_4 - \frac{1}{6} + \frac{1}{5}$, $B_6 - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$, ..., que son los coeficientes de $1/x^3$, $1/x^5$, $1/x^7$, ..., son enteros.

3. a) Si podemos demostrar que el doble del primer miembro de la ecuación treinta puede desarrollarse en potencias ascendentes de $1/n$ con coeficientes enteros, entonces la segunda parte de la afirmación dieciséis queda demostrada de inmediato.

Ejemplos resueltos

Los coeficientes enteros para índices pequeños Compruebe que los coeficientes $-B_4 - \frac{1}{6} + \frac{1}{5}$ y $B_{14} - \frac{1}{6}$ son enteros, usando $B_4 = 1/30$ y $B_{14} = 7/6$.

Ponga $-B_4 - \frac{1}{6} + \frac{1}{5}$ con denominador 30: $-1/30 - 5/30 + 6/30$.

La suma es $0/30 = 0$, un entero.

Para $B_{14} - \frac{1}{6}$: $7/6 - 1/6 = 6/6$.

Eso es 1, un entero, y coincide con el primer término $1/x^{15}$ del segundo miembro de la ecuación veintiocho.

Respuesta: Ambos son enteros: 0 y 1.

Ejercicios

1. Compruebe que $B_6 - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ es un entero, con $B_6 = 1/42$.

Pista: Ponga todo con denominador 42.

Respuesta: $1/42 - 7/42 + 6/42 = 0$, un entero.

2. Compruebe que $B_{10} - \frac{1}{6} + 1/11$ es un entero, con $B_{10} = 5/66$.

Pista: Ponga todo con denominador 66.

Respuesta: $5/66 - 11/66 + 6/66 = 0$, un entero.

3. ¿Por qué escribir $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1$ en lugar de $-\frac{1}{6}$ convierte estos coeficientes enteros en la afirmación veinte?

Pista: Fijese en qué primos aparecen en cada coeficiente.

Respuesta: Cada coeficiente es $\pm B_n$ más una suma de inversos de primos: $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ de $-\frac{1}{6}$, y $1/5$, $1/7$, $1/11$, etcétera, de los demás términos. Decir que es un entero significa que la parte fraccionaria de B_n es $\pm$ la suma de esos inversos menos uno, que es la afirmación veinte.

Secciones 13 a 15

Sección 13.

¿CUÁNTAS CIFRAS?

$$\log_{10} B_n \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \log_{10} n - 1.2324743503 n + 0.700120$$

$$\text{true value} \approx \dots + \frac{0.0362}{n}$$

$$\log_e B_n \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \log_e n - n(1 + \log_e 2\pi) + \frac{1}{2} \log_e 8\pi$$

$$\times \log_{10} e = 0.4342944819$$

$$n = 20 : \quad 2.7218 + 0.0018 = 2.7236 \approx \log_{10} 529.12$$

Contar cifras

Las primeras cifras, y el número de cifras tanto de la parte entera como del numerador de B_n , pueden hallarse con la fórmula aproximada $\log_{10} B_n = (n + 1/2) \log_{10} n - 1.2324743503 n + 0.700120$, siendo el valor verdadero mayor en unos $0.0362/n$ cuando n es grande; este es el resultado treinta y tres.

Esta fórmula se demuestra así: tomando logaritmos en ambos miembros de la ecuación veinticuatro, $\log_e B_n = (n + 1/2) \log_e n - n(1 +$

$\log_e 2\pi) + \frac{1}{2} \log_e 8\pi$, aproximadamente. Multiplicando ambos miembros por $\log_{10} e$, o sea 0,4342944819, y simplificando, podemos obtener el resultado.

Sección 14.

$$\frac{B_n}{B_{n-2}} \rightarrow \frac{n(n-1)}{4\pi^2}$$

$$\pi = 3.14159\ 26535\ 89793 \dots$$

rough ratio $\Rightarrow$ between $\Rightarrow$ exact

$$B_{12} \in (0, 1) : \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13} - 1 = \frac{691}{2730}$$

$$B_{14} \in (0, 2) : 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$$

$$B_{16} \in (7, 8) : 6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17} = \frac{3617}{510}$$

$$B_{18} \in (54, 55) : 56 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{19} = \frac{43867}{798}$$

$$B_{20} \in (529, 530) : 528 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{11} = \frac{174611}{330}$$

Cada B a partir de la anterior

Cambiando n por n menos 2 en la ecuación veinticuatro y tomando el cociente de los dos resultados, tenemos $B_n = (n(n-1)/(4\pi^2)) B_{n-2} (1 - (2^2 - 1)/(2^n - 1))(1 - (3^2 - 1)/(3^n - 1))(1 - (5^2 - 1)/(5^n - 1)) \dots$, la ecuación treinta y cuatro, donde 2, 3, 5, etcétera, son números primos.

Por tanto, vemos que B_n/B_{n-2} se aproxima muy rápidamente a $n(n-1)/(4\pi^2)$ a medida que n crece; este es el resultado treinta y cinco.

A partir del valor de pi, a saber, 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399, etcétera, la parte entera de cualquier B puede hallarse a partir de la B anterior; y, a partir de la parte entera, el valor exacto puede escribirse de inmediato con ayuda de la afirmación veinte, como sigue. La tabla da, para cada B, el cociente aproximado respecto de la B anterior, los dos números enteros entre los que está, hallados mediante un cálculo aproximado a partir de la B precedente, y, de ahí, su valor exacto.

B_2 está entre 0 y 1, así que es $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. $B_4 = (3 \cdot 4 / (4\pi^2))$ B_2 está entre 0 y 1, así que es $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - 1 = \frac{1}{30}$. $B_6 = (5 \cdot 6 / (4\pi^2))$ B_4 está entre 0 y 1, así que es $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$. $B_8 = (7 \cdot 8 / (4\pi^2))$ B_6 está entre 0 y 1, así que es $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - 1 = \frac{1}{30}$. $B_{10} = (9 \cdot 10 / (4\pi^2))$ B_8 está entre 0 y 1, así que es $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{11} = \frac{5}{66}$. $B_{12} = (11 \cdot 12 / (4\pi^2))$ B_{10} está entre 0 y 1, así que es $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13} - 1 = \frac{691}{2730}$. $B_{14} = (13 \cdot 14 / (4\pi^2))$ B_{12} está entre 0 y 2, así que es $2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$. $B_{16} = (15 \cdot 16 / (4\pi^2))$ B_{14} está entre 7 y 8, así que es $6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17} = \frac{3617}{510}$. $B_{18} = (17 \cdot 18 / (4\pi^2))$ B_{16} está entre 54 y 55, así que es $56 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{19} = \frac{43867}{798}$. $B_{20} = (19 \cdot 20 / (4\pi^2))$ B_{18} está entre 529 y 530, así que es $528 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{11} = \frac{174611}{330}$; y así sucesivamente.

Sección 15.

$$B_{444} = \frac{N}{D}$$

$$\text{fraction} = 23975417/90709710$$

$$N = 37 \times \text{prime}$$

$$\log_{10} B_{444} \approx 630.2433$$

ENTERA: 631 CIFRAS, 1751...

$$\log_{10} N \approx 630.2433 + \log_{10} 90709710 = 638.2010$$

N: 639 CIFRAS, 1588...

$$[B_{444}] + \frac{698392}{3023657} : 20 \mid \text{top}$$

$$[B_{444}] \text{ ends } \dots e4, e \text{ even}$$

$$N \text{ ends } \dots e57, e \text{ even}$$

B444 sin escribirlo

Por los teoremas anteriores conocemos algunas de las propiedades de B_n para todos los valores pares positivos de n . Tomemos como ejemplo $B_{444} = N/D$.

La parte fraccionaria de B_{444} es $23975417/90709710$ por la afirmación veinte. El numerador de B_{444} es divisible por 37 y el cociente es un número primo, por la afirmación dieciocho. De nuevo, $\log_{10} B_{444} = 630,2433$, aproximadamente, por el resultado treinta y tres. Por tanto, la parte entera de B_{444} tiene 631 cifras, y sus 4 primeras cifras son 1751. De nuevo, $\log_{10} N = \log_{10} B_{444} + \log_{10} D = 630,2433 + \log_{10} 90709710 = 638,2010$, aproximadamente. Por tanto, N tiene 639 cifras, y sus cuatro primeras cifras son 1588.

De nuevo, el numerador de $B_{444} - 1/30$ es divisible por 20; es decir, si $[B_{444}]$ es la parte entera de B_{444} , $[B_{444}] + 23975417/90709710 - 1/30 = [B_{444}] + 698392/3023657$ tiene un numerador divisible por 20. Por tanto, la parte entera de B_{444} termina en 4, y además la penúltima cifra es par.

Por tanto, N termina en 57, y además la antepenúltima cifra es par.

Preguntas

1. ¿Para qué puede usarse el resultado treinta y tres?
 - a. Para hallar las primeras cifras y el número de cifras de B_n y de su numerador
 - b. Para hallar exactamente el denominador de B_n
 - c. Para demostrar la afirmación catorce
 - d. Para calcular π
2. ¿Qué dice el resultado treinta y cinco sobre el cociente B_n/B_{n-2} ?
 - a. Que se aproxima muy rápidamente a $n(n-1)/(4\pi^2)$ a medida que n crece
 - b. Que siempre vale 1
 - c. Que se aproxima a π
 - d. Que disminuye hasta cero
3. ¿Cómo obtiene Ramanujan el valor exacto de una B una vez que sabe entre qué dos números enteros está?
 - a. Añade la parte fraccionaria que da la afirmación veinte
 - b. Hace la media de los dos números

- c. Usa solo la tabla de denominadores
 - d. Multiplica por π
4. ¿Qué concluye la sección 15 sobre las últimas cifras de N, el numerador de B_{444} ?
- a. Que N termina en 57 y la antepenúltima cifra es par
 - b. Que N termina en 00
 - c. Que N es un primo que termina en 1
 - d. Que no puede decirse nada

Respuestas

1. a) Las primeras cifras, y el número de cifras de la parte entera y del numerador de B_n , pueden hallarse con la fórmula aproximada de $\log_{10} B_n$.
2. a) Por la ecuación treinta y cuatro, B_n/B_{n-2} se aproxima muy rápidamente a $n(n-1)/(4\pi^2)$ a medida que n crece.
3. a) A partir de la parte entera, el valor exacto puede escribirse de inmediato con ayuda de la afirmación veinte, que da la parte fraccionaria.
4. a) Por tanto, N termina en 57, y además la antepenúltima cifra es par.

Ejemplos resueltos

B₁₆ a partir de B₁₄ Usando el cociente $(15 \cdot 16)/(4\pi^2)$ y $B_{14} = 7/6$, halle los dos números enteros entre los que está B_{16} , y luego su valor exacto con los primos 2, 3, 5, 17 de su denominador.

$4\pi^2$ vale unos 39,478, así que $15 \times 16/(4\pi^2) = 240/39,478$, unos 6,079.

Multiplicar por $B_{14} = 7/6$, unos 1,1667, da unos 7,09, así que B_{16} está entre 7 y 8.

La mitad de 16 es par, así que la parte fraccionaria es $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17} - 1 = 47/510$.

Así que $B_{16} = 7 + 47/510 = 6 + 1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/17 = 3617/510$.

Respuesta: $B_{16} = 3617/510$

Ejercicios

1. Use el cociente $17 \cdot 18 / (4\pi^2)$ y $B_{16} = 3617/510$ (unos 7,092) para hallar entre qué números enteros está B_{18} .

Pista: $17 \times 18 = 306$ y $4\pi^2$ vale unos 39,478.

Respuesta: $306/39,478$ vale unos 7,751, y $7,751 \times 7,092$ son unos 54,97, así que B_{18} está entre 54 y 55, como en la tabla.

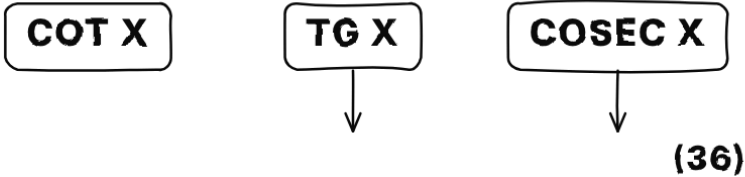
2. Use el resultado treinta y tres para estimar $\log_{10} B_{20}$, y compárelo con el valor verdadero $\log_{10}(174611/330) = 2,72356$.

Pista: Calcule $20,5 \times \log_{10} 20 - 1,2324743503 \times 20 + 0,700120$, con $\log_{10} 20 = 1,30103$.

Respuesta: $26,67112 - 24,64949 + 0,70012 = 2,72175$; el valor verdadero es mayor en unos 0,0018, cerca de $0,0362/20 = 0,0018$, como dice el resultado treinta y tres.

Secciones 16 y 17

Sección 16.



$$\frac{4}{3}B_n(2^n - 1) = c_6B_{n-6}(2^{n-6} - 1) - c_{12}B_{n-12}(2^{n-12} - 1) + \dots$$

$$+ \frac{1}{3}n(-1)^{\frac{n-2}{6}} \text{ or } \frac{1}{6}n(-1)^{\frac{n-4}{6}} \text{ or } \frac{1}{3}n(-1)^{\frac{n-6}{6}}$$

(37)

$$c_3\left(1 - \frac{1}{2^{n-4}}\right)B_{n-3} - c_9\left(1 - \frac{1}{2^{n-10}}\right)B_{n-9} + c_{15}\left(1 - \frac{1}{2^{n-16}}\right)B_{n-15} - \dots$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{n}{2^n} \left(3^{\frac{n-1}{2}} + (-1)^{\frac{n-3}{6}} \text{ or } (-1)^{\frac{n+1}{6}} \text{ or } (-1)^{\frac{n+5}{6}} \right)$$

Empezar con tg y cosec

En lugar de empezar con cot x, como en las secciones 2 y 3, podemos empezar con tg x o cosec x y obtener otros resultados semejantes.

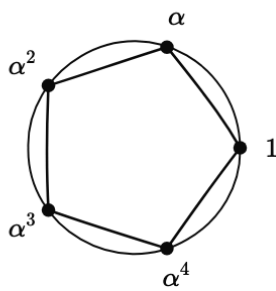
Así, primero, $(4/3)B_n(2^n - 1) = c_6B_{n-6}(2^{n-6} - 1) - c_{12}B_{n-12}(2^{n-12} - 1) + \dots + \frac{1}{3}n(-1)^{((n-2)/6)} \text{ o } \frac{1}{6}n(-1)^{((n-4)/6)} \text{ o } \frac{1}{3}n(-1)^{((n-6)/6)}$, la ecuación treinta y seis.

Segundo, $c_3(1 - 1/2^{n-4})B_{n-3} - c_9(1 - 1/2^{n-10})B_{n-9} + c_{15}(1 - 1/2^{n-16})B_{n-15} - \dots = (2/3)(n/2^n)(3^{((n-1)/2)} + (-1)^{((n-3)/6)} \text{ o } (-1)^{((n+1)/6)} \text{ o } (-1)^{((n+5)/6)})$, la ecuación treinta y siete.

Sección 17.

1 INTERVALO 2 INTERVALOS 3 INTERVALOS

$$\omega^p = 1 \text{ or } \omega^p = i$$



$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{k=0}^4 \sin x \alpha^k \\ &= 5 \left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^{15}}{15!} + \frac{x^{25}}{25!} - \dots \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &16 \prod_{k=0}^4 \sin x \alpha^k \\ &= \varphi(2x) + \varphi(x(1 + \sqrt{5})) + \varphi(x(1 - \sqrt{5})) \end{aligned}$$

Cinco raíces de la unidad

Las fórmulas obtenidas en las secciones 1, 3 y 4 pueden llamarse, respectivamente, fórmulas de un intervalo, de dos intervalos y de tres intervalos. Las fórmulas de p intervalos pueden obtenerse tomando las raíces p-ésimas de la unidad o de i, según que p sea impar o par.

Por ejemplo, tomemos las raíces quintas de la unidad, 1, α , α^2 , α^3 , α^4 , y hallemos las fórmulas de 5 intervalos.

Sea $\varphi(x) = \sin x + \sin x\alpha + \sin x\alpha^2 + \sin x\alpha^3 + \sin x\alpha^4 = 5(x^5/5! - x^{15}/15! + x^{25}/25! - \dots)$.

Entonces puede demostrarse fácilmente que $16 \sin x \sin x\alpha \sin x\alpha^2 \sin x\alpha^3 \sin x\alpha^4 = \varphi(2x) - \varphi(2x(\alpha + \alpha^4)) - \varphi(2x(\alpha^2 + \alpha^3)) = \varphi(2x) + \varphi(x(1 + \sqrt{5})) + \varphi(x(1 - \sqrt{5}))$.

Tomando logaritmos y derivando ambos miembros, tenemos $5(B_0 + B_{10}x^{10}/10! + B_{20}x^{20}/20! + B_{30}x^{30}/30! + \dots) = -x((x^4/4!)(1 + \alpha_5) - (x^{14}/14!)(1 + \alpha_{15}) + \dots) / ((x^5/5!)(1 + \alpha_5) - (x^{15}/15!)(1 + \alpha_{15}) + \dots)$, la ecuación treinta y ocho, donde $\alpha_n = ((1 + \sqrt{5})/2)^n + ((1 - \sqrt{5})/2)^n$, de modo que $\alpha_n \alpha_m = \alpha_{n+m} + (-1)^n \alpha_{m-n}$.

$$\begin{array}{ccccccc} \odot & \odot & \odot & \bullet & \bullet & \odot & \odot & \odot & \bullet & \bullet & \odot & \odot & \odot & \bullet & \bullet \\ & & B_4 & & & & B_{14} & & & & & & B_{24} & & \end{array}$$

$$5 \left(B_0 + \frac{B_{10}x^{10}}{10!} + \frac{B_{20}x^{20}}{20!} + \dots \right) \quad (38)$$

$$= -x \frac{\frac{x^4}{4!}(1 + \alpha_5) - \frac{x^{14}}{14!}(1 + \alpha_{15}) + \dots}{\frac{x^5}{5!}(1 + \alpha_5) - \frac{x^{15}}{15!}(1 + \alpha_{15}) + \dots}$$

$$\alpha_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$$5 \left(\frac{B_2x^2}{2!} + \frac{B_{12}x^{12}}{12!} + \dots \right) = x \frac{\frac{x^6}{6!}(1 + \alpha_7) - \dots}{\frac{x^5}{5!}(1 + \alpha_5) - \dots} \quad (39)$$

$$5 \left(\frac{B_4x^4}{4!} + \frac{B_{14}x^{14}}{14!} + \dots \right) = x \frac{\frac{x^8}{8!}(\alpha_7 - 1) - \dots}{\frac{x^5}{5!}(1 + \alpha_5) - \dots} \quad (40)$$

Una hebra por fórmula

Análogamente, primero, $5(B_2x^2/2! + B_{12}x^{12}/12! + B_{22}x^{22}/22! + \dots)$
 $= x ((x^6/6!)(1 + \alpha_7) - (x^{16}/16!)(1 + \alpha_{17}) + \dots) / ((x^5/5!)(1 + \alpha_5) -$
 $(x^{15}/15!)(1 + \alpha_{15}) + \dots)$, la ecuación treinta y nueve.

Segundo, $5(B_4x^4/4! + B_{14}x^{14}/14! + B_{24}x^{24}/24! + \dots) = x ((x^8/8!)(\alpha_7$
 $- 1) - (x^{18}/18!)(\alpha_{17} - 1) + \dots) / ((x^5/5!)(1 + \alpha_5) - (x^{15}/15!)(1 + \alpha_{15})$
 $+ \dots)$, la ecuación cuarenta.

Tercero, $10(B_6x^6/6! + B_{16}x^{16}/16! + B_{26}x^{26}/26! + \dots) = x ((x^{10}/10!)$
 $(\alpha_{10} - 3) - (x^{20}/20!)(\alpha_{20} - 3) + (x^{30}/30!)(\alpha_{30} - 3) - \dots) / ((x^5/5!)(1$
 $+ \alpha_5) - (x^{15}/15!)(1 + \alpha_{15}) + (x^{25}/25!)(1 + \alpha_{25}) - \dots)$, la ecuación
cuarenta y uno.



$$10 \left(\frac{B_6 x^6}{6!} + \frac{B_{16} x^{16}}{16!} + \dots \right) = x \frac{\frac{x^{10}}{10!} (\alpha_{10} - 3) - \dots}{\frac{x^5}{5!} (1 + \alpha_5) - \dots} \quad (41)$$

$$5 \left(\frac{B_8 x^8}{8!} + \frac{B_{18} x^{18}}{18!} + \dots \right) = x \frac{\frac{x^{12}}{12!} (\alpha_{11} - 1) - \dots}{\frac{x^5}{5!} (1 + \alpha_5) - \dots} \quad (42)$$

CINCO HEBRAS

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^4 \cos x \alpha^k = 5 \left(1 - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{20}}{20!} - \dots \right)$$

MUCHAS MÁS IDENTIDADES

Las otras hebras, y los cosenos

Cuarto, $5(B_8x^8/8! + B_{18}x^{18}/18! + B_{28}x^{28}/28! + \dots) = x((x^{12}/12!)(\alpha_{11} - 1) - (x^{22}/22!)(\alpha_{21} - 1) + (x^{32}/32!)(\alpha_{31} - 1) - \dots) / ((x^5/5!)(1 + \alpha_5) - (x^{15}/15!)(1 + \alpha_{15}) + (x^{25}/25!)(1 + \alpha_{25}) - \dots)$, la ecuación cuarenta y dos.

De nuevo, a partir de $16 \cos x \cos x\alpha \cos x\alpha^2 \cos x\alpha^3 \cos x\alpha^4 = 1 + \psi(2x) + \psi(2x(\alpha + \alpha^4)) + \psi(2x(\alpha^2 + \alpha^3))$, donde $\psi(x) = \cos x + \cos x\alpha + \cos x\alpha^2 + \cos x\alpha^3 + \cos x\alpha^4 = 5(1 - x^{10}/10! + x^{20}/20! - x^{30}/30! + \dots)$, y de relaciones semejantes, podemos obtener muchas otras identidades.

Preguntas

1. ¿Qué dice la sección 16 que puede sustituir a la cotangente como punto de partida?
 - a. La tangente o la cosecante
 - b. El logaritmo
 - c. Solo la exponencial
 - d. La raíz cuadrada
2. ¿Cómo se obtienen las fórmulas de p intervalos, según la sección 17?
 - a. Tomando las raíces p-ésimas de la unidad o de i, según que p sea impar o par
 - b. Elevando al cuadrado p veces la fórmula de un intervalo
 - c. Dividiendo entre p
 - d. Usando p primos distintos

3. ¿Qué números de Bernoulli aparecen en el primer miembro de la ecuación treinta y ocho?
- $B_0, B_{10}, B_{20}, B_{30}, \dots$, uno de cada diez índices
 - Todos
 - Solo los de índice impar
 - Solo B_2, B_4, B_6

Respuestas

1. **a)** En lugar de empezar con $\cot x$, como en las secciones 2 y 3, podemos empezar con $\tan x$ o $\operatorname{cosec} x$ y obtener otros resultados semejantes.
2. **a)** Las fórmulas de p intervalos pueden obtenerse tomando las raíces p -ésimas de la unidad o de i , según que p sea impar o par.
3. **a)** La ecuación treinta y ocho tiene $5(B_0 + B_{10}x^{10}/10! + B_{20}x^{20}/20! + B_{30}x^{30}/30! + \dots)$ en el primer miembro.

Ejemplos resueltos

La ecuación treinta y seis para $n = 6$ Compruebe la ecuación treinta y seis para $n = 6$, donde el segundo miembro se reduce a $c_6 B_0(2^0 - 1)$ más el último término $\frac{1}{3}n(-1)^{(n-6)/6}$. Use $B_6 = 1/42$.

El primer miembro es $(4/3) \times (1/42) \times (2^6 - 1) = (4/3) \times 63/42$.

$63/42 = 3/2$, así que el primer miembro es $(4/3) \times (3/2) = 2$.

En el segundo miembro, $c_6 B_0(2^0 - 1) = 0$ porque $2^0 - 1 = 0$.

El último término es $\frac{1}{3} \times 6 \times (-1)^0 = 2$, así que ambos miembros valen 2.

Respuesta: Ambos miembros valen 2

Ejercicios

1. Los números $\alpha_n = ((1 + \sqrt{5})/2)^n + ((1 - \sqrt{5})/2)^n$ son enteros. Halle α_1 , α_2 y α_5 .

Pista: Use $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \alpha_{n-1}$.

Respuesta: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 3$, y siguiendo 4, 7, 11, así que $\alpha_5 = 11$.

2. Compruebe el término principal de la ecuación treinta y ocho: para x pequeño, ¿a qué es igual $-x ((x^4/4!)(1 + \alpha_5)) / ((x^5/5!)(1 + \alpha_5))$, y qué dice eso de B_0 ?

Pista: Los factores $1 + \alpha_5$ se cancelan.

Respuesta: Es $-x (x^4/24)/(x^5/120) = -5$, y el primer miembro empieza por $5B_0$, así que $B_0 = -1$.

3. Compruebe el término principal de la ecuación treinta y nueve con $\alpha_5 = 11$ y $\alpha_7 = 29$.

Pista: Compare $x (x^6/720)(30) / ((x^5/120)(12))$ con $5B_2x^2/2$.

Respuesta: El segundo miembro es $x^2 \times (30/720)/(12/120) = 5x^2/12$, y $5B_2x^2/2 = 5x^2/12$ da $B_2 = 1/6$.

Sección 18 y la nota de los editores

Sección 18.

CUATRO INTERVALOS

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

$$a_{m+n} = a_m a_n - a_{m-n}/2^n$$

$$b_{m+n} = a_m b_n + b_{m-n}/2^n$$

$$4\left(B_0 + \frac{B_8 x^8}{8!} + \frac{B_{16} x^{16}}{16!} + \frac{B_{24} x^{24}}{24!} + \dots\right) \quad (43)$$

$$= -x \frac{\frac{x^3}{3!} a_2 - \frac{x^{11}}{11!} a_6 + \frac{x^{19}}{19!} a_{10} - \dots}{\frac{x^4}{4!} a_2 - \frac{x^{12}}{12!} a_6 + \frac{x^{20}}{20!} a_{10} - \dots}$$

Ayudantes con raíz de dos

Las cuatro fórmulas de intervalo pueden obtenerse de las identidades siguientes.

Si $a_n = (1 + 1/\sqrt{2})^n + (1 - 1/\sqrt{2})^n$ y $b_n = (1 + 1/\sqrt{2})^n - (1 - 1/\sqrt{2})^n$, de modo que $a_{m+n} = a_m a_n - a_{m-n}/2^n$ y $b_{m+n} = a_m b_n + b_{m-n}/2^n$, entonces se cumple lo siguiente.

Segundo, $4(B_2x^2/2! + B_{10}x^{10}/10! + B_{18}x^{18}/18! + \dots) = -x((x^5/5!)a_3 - (x^{13}/13!)a_7 + (x^{21}/21!)a_{11} - \dots) / ((x^4/4!)a_2 - (x^{12}/12!)a_6 + (x^{20}/20!)a_{10} - \dots)$, ecuación cuarenta y cuatro.



$$4\left(\frac{B_2x^2}{2!} + \frac{B_{10}x^{10}}{10!} + \dots\right) = -x \frac{\frac{x^5}{5!}a_3 - \frac{x^{13}}{13!}a_7 + \dots}{\frac{x^4}{4!}a_2 - \frac{x^{12}}{12!}a_6 + \dots} \quad (44)$$

$$4\sqrt{2}\left(\frac{B_4x^4}{4!} + \frac{B_{12}x^{12}}{12!} + \dots\right) = x \frac{\frac{x^7}{7!}b_3 - \frac{x^{15}}{15!}b_7 + \dots}{\frac{x^4}{4!}a_2 - \frac{x^{12}}{12!}a_6 + \dots} \quad (45)$$

$$4\sqrt{2}\left(\frac{B_6x^6}{6!} + \frac{B_{14}x^{14}}{14!} + \dots\right) = x \frac{\frac{x^9}{9!}b_4 - \frac{x^{17}}{17!}b_8 + \dots}{\frac{x^4}{4!}a_2 - \frac{x^{12}}{12!}a_6 + \dots} \quad (46)$$

CUATRO HEBRAS

Cuatro hebras, de ocho en ocho

Tercero, $4\sqrt{2}(B_4x^4/4! + B_{12}x^{12}/12! + B_{20}x^{20}/20! + \dots) = x((x^7/7!)b_3 - (x^{15}/15!)b_7 + (x^{23}/23!)b_{11} - \dots) / ((x^4/4!)a_2 - (x^{12}/12!)a_6 + (x^{20}/20!)a_{10} - \dots)$, ecuación cuarenta y cinco.

Cuarto, $4\sqrt{2}(B_6x^6/6! + B_{14}x^{14}/14! + B_{22}x^{22}/22! + \dots) = x((x^9/9!)b_4 - (x^{17}/17!)b_8 + (x^{25}/25!)b_{12} - \dots) / ((x^4/4!)a_2 - (x^{12}/12!)a_6 +$

$(x^{20}/20!)a_{10} - \dots)$, ecuación cuarenta y seis.

Nota de los editores, del Apéndice I, las notas sobre el artículo 1.

NOTAS EDITORES

p.1: B_{2n} for the usual B_n

p.1: $c_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

p.4: (12) true for odd $n > 1$

✕ p.8: after (27): series diverges for $x \geq n$

✕ p.9: after (29): the same

p.9: coefficients, if integral, are odd

p.10: $\psi(z+1) - \psi(\frac{1}{2}z+1) = \log 2 - \sum \frac{(-1)^{m-1}}{z+m}$

p.11: $B_{444} = N/D$

Las notas de los editores

Página 1, ecuación uno: Ramanujan escribe B_{2n} donde lo habitual es B_n . Página 1, ecuación dos: $c_k = n!/(k!(n-k)!)$, el coeficiente binomial. Página 4, ecuación doce: la ecuación doce es cierta si n es impar y mayor que 1, y los últimos términos se dan en los tres casos en que n deja resto 1, menos 1 o 3 al dividirlo entre 6. Página 8, la deducción que sigue a la ecuación veintisiete en la sección 11: la demostración no es válida tal como está, ya que la serie del integrando es divergente cuando x es al menos n . La misma observación se aplica a la página 9, la deducción que sigue a la ecuación veintinueve. Página

9, segunda línea desde abajo, sección 12: los coeficientes, si son enteros, son necesariamente impares. Página 10, ecuación treinta y dos: aplíquese la ecuación treinta y uno a la conocida fórmula $\psi(z+1) - \psi(1/2z+1) = \log 2 - \sum (-1)^{m-1}/(z+m)$, donde $\psi(z)$ es la derivada de $\log \Gamma(z)$. Página 11, segunda línea desde abajo, sección 15: N y D son el numerador y el denominador de B_{444} .

El artículo es interesante como muestra de la primera manera de Ramanujan, pero los resultados principales son bien conocidos y las demostraciones son incompletas. Así, la afirmación veinte de la sección 8 es sencillamente el teorema de von Staudt y Clausen, y la afirmación dieciséis, que es consecuencia de la afirmación veinte, ya la conocía Euler: véase P. Bachmann, *Niedere Zahlentheorie*, volumen segundo, páginas 43 a 51 y página 54; o N. Nielsen, *Traité élémentaire des nombres de Bernoulli*, páginas 244 a 245 y 258. Ramanujan enuncia ocho teoremas, a saber, las afirmaciones catorce a veintiuno, que recogen propiedades aritméticas de las B. De ellos, se indican demostraciones para tres, a saber, dieciséis, veinte y veintiuno; pero los teoremas de los que dependerían esas demostraciones, a saber, la ecuación veintiocho y las proposiciones correspondientes sobre las series treinta y treinta y dos, nunca se demuestran. Otros dos teoremas, diecisiete y dieciocho, se presentan como corolarios de dieciséis y catorce; y catorce, quince y diecinueve se enuncian meramente como conjeturas.

CONOCIDOS; PRUEBAS INCOMPLETAS

20: VON STAUDT–CLAUSEN

16: EULER

ESBOZO DE PRUEBACOROLARIO CONJETURA

16, 20, 21 ?

17, 18

14, 15, 19

rest on (28), (30), (32)

NUNCA DEMOSTRADO

Ocho afirmaciones clasificadas

Preguntas

1. ¿Qué números de Bernoulli aparecen en el primer miembro de la ecuación cuarenta y tres?
 - a. B_0 , B_8 , B_{16} , B_{24} , ..., separados de ocho en ocho
 - b. Todos los números de Bernoulli de índice par
 - c. Solo B_2 y B_{10}
 - d. Uno de cada cinco números de Bernoulli

2. ¿Qué dicen los editores sobre la demostración de la sección 11 que sigue a la ecuación veintisiete?
 - a. Que no es válida tal como está, ya que la serie del integrando diverge cuando x es al menos n
 - b. Que es completa y correcta
 - c. Que se copió de Euler
 - d. Que demuestra la afirmación catorce

3. ¿Cuál es el veredicto general de los editores sobre el artículo?
 - a. Interesante como muestra de la primera manera de Ramanujan, pero con resultados principales bien conocidos y demostraciones incompletas
 - b. Una solución completa y original de todos sus problemas
 - c. Completamente erróneo
 - d. De interés puramente histórico, sin ningún resultado correcto

4. ¿Qué afirmaciones dicen los editores que se enunciaron meramente como conjeturas?
 - a. Catorce, quince y diecinueve
 - b. Dieciséis, veinte y veintiuno
 - c. Diecisiete y dieciocho
 - d. Las ocho

Respuestas

1. a) La ecuación cuarenta y tres tiene $4(B_0 + B_8x^8/8! + B_{16}x^{16}/16! + B_{24}x^{24}/24! + \dots)$ en el primer miembro.

- 2. a)** La demostración no es válida tal como está, ya que la serie del integrando es divergente cuando x es al menos n .
- 3. a)** El artículo es interesante como muestra de la primera manera de Ramanujan, pero los resultados principales son bien conocidos y las demostraciones son incompletas.
- 4. a)** Catorce, quince y diecinueve se enuncian meramente como conjeturas; diecisiete y dieciocho son corolarios, y se indican demostraciones para dieciséis, veinte y veintiuno.

Ejercicios

- 1.** Calcule $a_2 = (1 + 1/\sqrt{2})^2 + (1 - 1/\sqrt{2})^2$.

Pista: Desarrolle ambos cuadrados; los términos centrales se cancelan.

Respuesta: $a_2 = 2(1 + 1/2) = 3$, ya que $(1 \pm 1/\sqrt{2})^2 = 1 \pm \sqrt{2} + 1/2$.

- 2.** Compruebe el término principal de la ecuación cuarenta y tres: para x pequeño, ¿a qué es igual $-x ((x^3/3!)a_2)/((x^4/4!)a_2)$, y qué dice eso de B_0 ?

Pista: Los factores a_2 se cancelan.

Respuesta: Es $-x (x^3/6)/(x^4/24) = -4$, y el primer miembro empieza por $4B_0$, así que $B_0 = -1$.

- 3.** Según los editores, ¿de qué resultados no demostrados dependen las demostraciones que Ramanujan indica para las afirmaciones dieciséis, veinte y veintiuno?

Pista: Piense en las series de la sección 12.

Respuesta: De la ecuación veintiocho y de las proposiciones correspondientes sobre las series treinta y treinta y dos, que nunca se demuestran.