

Artículos completos de Srinivasa Ramanujan



Srinivasa Ramanujan · 1927

Audiolecciones ilustradas

Lecturized

Artículos completos de Srinivasa Ramanujan

Audiolecciones ilustradas

Srinivasa Ramanujan · 1927

Contado como lecciones ilustradas por Lecturized
lecturized.com

Del original: Collected Papers of Srinivasa Ramanujan, ed. G. H. Hardy, P. V. Seshu
Aiyar and B. M. Wilson (Cambridge, 1927)

Índice

Números escondidos en la cotangente

Cómo hacer desaparecer la mitad de los términos

Una fórmula para comprobar el trabajo, y la tabla

Patrones leídos en la tabla

La parte fraccionaria, y un número fijado por su tamaño

Una demostración que cuelga de una sola afirmación

Cuántas cifras, y el valor siguiente a partir del anterior

Un gigante descrito, y cribas de cinco vías

Cribas de cuatro vías, y el veredicto de los editores

Números escondidos en la cotangente

Tome una calculadora, póngala en radianes y calcule $0,1 \times \cot 0,1$: obtendrá 0,9966644. Ahora calcule a mano $1 - 0,01/3 - 0,0001/45$, y aparecen las mismas cifras. Esas pequeñas fracciones, un tercio y un cuarenta y cincoavo, están hechas de una famosa familia de números, y en 1911 un joven oficinista de Madrás, Ramanujan, publicó sobre ellos su primer artículo.

$$\begin{array}{ccc}
 0.1 \cot 0.1 & & 1 - \frac{0.01}{3} - \frac{0.0001}{45} \\
 \boxed{0.9966644} & = & \mathbf{0.9966644}
 \end{array}$$

$$x \cot x = 1 - \frac{B_2}{2!} (2x)^2 - \frac{B_4}{4!} (2x)^4 - \dots$$

$$B_2 = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{x^2}{3}$$

$$B_4 = \frac{1}{30} \Rightarrow \frac{x^4}{45}$$

$$B_0 = -1$$

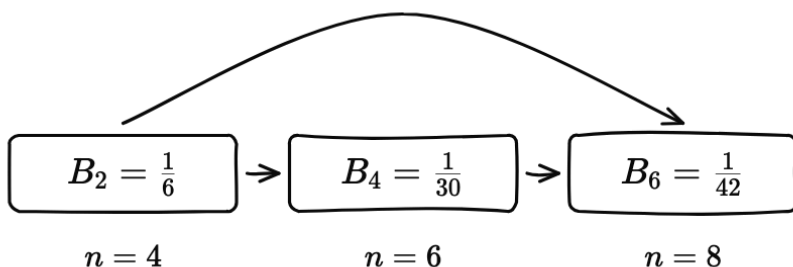
Dos caminos hacia 0,9966644

Parte del desarrollo $x \cot x = 1 - (B_2/2!)(2x)^2 - (B_4/4!)(2x)^4 - (B_6/6!)(2x)^6 - \dots$, su ecuación uno. En palabras: la función x por

cotangente de x es una suma de potencias pares de x , y cada coeficiente lleva un número B_n , un número de Bernoulli en la convención de Ramanujan, aquí siempre positivo. De dónde sale: la cotangente es el coseno entre el seno, ambos son series de potencias conocidas, y dividir una serie entre la otra da esta. Con $B_2 = 1/6$ el segundo término es $(1/6)/2 \times 4x^2 = x^2/3$, y con $B_4 = 1/30$ el tercero es $x^4/45$: justo las fracciones de su calculadora. Leyendo el término constante del mismo modo, toma $B_0 = -1$, para que también el primer término encaje en el patrón.

Después escribe la cotangente de tres maneras: como $\cos x / \sin x$, como $\sin 2x / (1 - \cos 2x)$ y como $(1 + \cos 2x) / \sin 2x$, cada una con su numerador y su denominador desarrollados en series de potencias. Multiplique cada ecuación por su denominador y ambos miembros se convierten en series simples; dos series son iguales solo si cada potencia de x tiene el mismo coeficiente, de modo que cada comparación da una ecuación entre las B . El caso par es $c_2 B_{n-2} - c_4 B_{n-4} + c_6 B_{n-6} - \dots + (-1)^{(n-2)/2} B_0 + (n/2)(-1)^{(n-2)/2} = 0$, la ecuación tres, donde c_k significa el número de maneras de elegir k cosas entre n . Pruebe con n igual a 4: $6 \times B_2 + 1 - 2 = 0$, así que $B_2 = 1/6$. Pruebe con n igual a 6: $15B_4 - 15 \times 1/6 - 1 + 3 = 0$, así que $B_4 = 1/30$. Las ecuaciones dos y cuatro hacen lo mismo para n impar, con potencias de dos en la primera.

ANTERIORES



$$(x \cot x)^2 = -x^2 \left(1 + \frac{d \cot x}{dx} \right)$$

$$\frac{1}{2}(n+1)B_n = c_2 B_2 B_{n-2} + \cdots$$

La ecuación tres, paso a paso

Pruébalo

Con lápiz y papel, ponga n igual a 8 en la ecuación tres y despeje B_6 . Debería obtener $28B_6 - 70/30 + 28/6 + 1 - 4 = 0$, y por tanto $B_6 = 1/42$.

El problema, dice Ramanujan, es que cada B nueva necesita todas las anteriores, unos n medios términos cada vez, y el trabajo se vuelve tedioso. Su primer atajo eleva la serie al cuadrado: $(x \cot x)^2 = -x^2(1 + d \cot x / dx)$, una identidad que cualquiera puede comprobar a partir de la derivada de la cotangente. Comparar coeficientes da $\frac{1}{2}(n+1)B_n = c_2 B_2 B_{n-2} + c_4 B_4 B_{n-4} + \cdots$, el resultado cinco, que se detiene en la

mitad con un término al cuadrado cuando n medios es par. Para n igual a 4 queda $(5/2)B_4 = \frac{1}{2} \times 6 \times (1/6)^2 = 1/12$, de nuevo $B_4 = 1/30$. El mismo truco funciona con $d \operatorname{tg} x / dx = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

Para recordar

Ramanujan define sus números de Bernoulli como los coeficientes de la serie de $x \cot x$, todos positivos, con B cero igual a menos uno. Escribir la cotangente como cociente de series e igualar cada potencia de x convierte esa definición en ecuaciones que producen las B una tras otra: un sexto, un treintavo, un cuarentaidosavo. Cada una de esas ecuaciones usa todas las B anteriores, así que el trabajo crece deprisa. Elevar $x \cot x$ al cuadrado da una segunda relación que usa productos de B y llega a los mismos valores, el primer indicio de que identidades más ingeniosas pueden acortar el trabajo.

Preguntas

1. ¿Por qué las fracciones un tercio y un cuarenta y cincoavo de la comprobación con calculadora no son casualidad?
 - a. Son errores de redondeo de la calculadora
 - b. Son los coeficientes de $x \cot x$, contruidos con $B_2 = 1/6$ y $B_4 = 1/30$ mediante la ecuación (1)
 - c. Son los dos primeros denominadores primos
 - d. Salen solo de la serie del seno

2. ¿Por qué toma Ramanujan $B_0 = -1$?
 - a. Para que el término constante de $x \cot x$ encaje en el mismo patrón que los demás términos
 - b. Porque todos los números de Bernoulli son negativos
 - c. Para que la ecuación tres no tenga solución para n impar
 - d. Porque $\cot 0$ es igual a -1

3. ¿Qué hace legítimo comparar coeficientes para obtener ecuaciones?
 - a. Dos series solo pueden ser iguales si cada potencia de x tiene el mismo coeficiente en ambos miembros
 - b. Todas las series de potencias tienen los mismos coeficientes
 - c. Los coeficientes son siempre enteros
 - d. Los coeficientes pueden elegirse libremente

4. ¿Qué identidad da el resultado cinco, la relación con productos de B ?
 - a. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
 - b. $(x \cot x)^2 = -x^2(1 + d \cot x / dx)$
 - c. $\cot x = \cos x / \sin x$
 - d. $d \sin x / dx = \cos x$

Respuestas

1. b) Con $B_2 = 1/6$ el segundo término de la ecuación (1) es $x^2/3$, y con $B_4 = 1/30$ el tercero es $x^4/45$: las fracciones de la calculadora.
2. a) Leyendo el término constante igual que los demás, toma B_0 igual a -1 para que el primer término encaje en el patrón.

3. a) Tras multiplicar por el denominador, ambos miembros son series simples, y dos series son iguales solo si cada potencia de x tiene el mismo coeficiente.

4. b) Su primer atajo eleva la serie al cuadrado con $(x \cot x)^2 = -x^2(1 + d \cot x / dx)$ y compara coeficientes.

Ejemplos resueltos

B₂ y B₄ con la ecuación tres Con $B_0 = -1$, use la ecuación tres para $n = 4$ y $n = 6$ y halle B_2 y B_4 ; c_k es el número de maneras de elegir k cosas entre n .

Para $n = 4$, $c_2 = 6$ y el signo $(-1)^{((4-2)/2)}$ es -1 , así que la ecuación es $6B_2 - B_0 - 2 = 0$.

Poniendo $B_0 = -1$ queda $6B_2 + 1 - 2 = 0$, así que $B_2 = 1/6$.

Para $n = 6$, $c_2 = c_4 = 15$ y el signo es $+1$, así que $15B_4 - 15B_2 + B_0 + 3 = 0$.

Es decir, $15B_4 - 15/6 - 1 + 3 = 0$, así que $15B_4 = 1/2$.

Respuesta: $B_2 = 1/6$, $B_4 = 1/30$

Ejercicios

1. Ponga $n = 8$ en la ecuación tres y halle B_6 .

Pista: $c_2 = 28$, $c_4 = 70$, $c_6 = 28$, y el signo $(-1)^{((8-2)/2)}$ es -1 , así que el término de B_0 se convierte en $+1$.

Respuesta: $B_6 = 1/42$: $28B_6 - 70/30 + 28/6 + 1 - 4 = 0$ da $28B_6 = 2/3$.

2. Use el resultado cinco para $n = 4$ y obtenga B_4 a partir de $B_2 = 1/6$.

Pista: La mitad de 4 es par, así que el único término es $\frac{1}{2} c_2 (B_2)^2$ con $c_2 = 6$.

Respuesta: $B_4 = 1/30$: $(5/2)B_4 = \frac{1}{2} \times 6 \times 1/36 = 1/12$.

3. Usando $B_6 = 1/42$ en la ecuación (1), ¿cuál es el coeficiente de x^6 en $x \cot x$?

Pista: El término es $(B_6/6!)(2x)^6$, y $6! = 720$, $2^6 = 64$.

Respuesta: $-2/945: (1/42)/720 \times 64 = 64/30240 = 2/945$, con signo menos por la ecuación (1).

Cómo hacer desaparecer la mitad de los términos

Ponga en un balancín a dos personas que pesen exactamente lo mismo, una en cada extremo: la tabla queda horizontal, porque lo que una empuja hacia abajo la otra lo empuja hacia arriba. El siguiente movimiento de Ramanujan funciona como ese balancín, con funciones en lugar de personas. Suma dos series cuyos términos son iguales en unos lugares y opuestos en otros, y cada pareja de opuestos se cancela.



COT	B_0	$+B_2$	$+B_4$	$+B_6$	$+B_8$	$+B_{10}$
COTH	B_0	$-B_2$	$+B_4$	$-B_6$	$+B_8$	$-B_{10}$
SUMA	$2B_0$	0	$2B_4$	0	$2B_8$	0

Gemelas que se cancelan

La pareja de la cotangente es la cotangente hiperbólica, $\coth$, que es la cotangente con un argumento imaginario: $\coth \frac{1}{2}x = i \cot \frac{1}{2}ix$, donde i es la raíz cuadrada de menos uno. Su serie tiene los mismos coeficientes que la de la cotangente, con un signo de cada dos cambiado. Así que escribe $-\frac{1}{2}x(\cot \frac{1}{2}x + \coth \frac{1}{2}x) = 2(B_0 + B_4x^4/4! + B_8x^8/8! + \dots)$. En palabras: al sumar las dos quedan solo los términos cuyo índice es múltiplo de cuatro, B cero, B cuatro, B ocho, y se duplican; los términos de B dos, B seis, B diez se cancelan como en el balancín.

Para convertir el primer miembro en algo con lo que se pueda calcular, lo reescribe como una sola fracción y usa el teorema de De Moivre, la regla para elevar números complejos a potencias. El resultado es la ecuación seis: $2(B_0 + B_4x^4/4! + \dots) = -x(x/1! - x^5/(2^2 \cdot 5!) + x^9/(2^4 \cdot 9!) - \dots) / (x^2/2! - x^6/(2^2 \cdot 6!) + x^{10}/(2^4 \cdot 10!) - \dots)$. Compruebe el primer término: para x muy pequeño el segundo miembro es $-x \cdot x / (x^2/2) = -2$, y el primer miembro empieza por $2B_0 = -2$, así que encaja.

Restar en lugar de sumar conserva la otra mitad: $-\frac{1}{2}x(\cot \frac{1}{2}x - \coth \frac{1}{2}x) = 2(B_2x^2/2! + B_6x^6/6! + B_{10}x^{10}/10! + \dots)$, y la ecuación siete lo da como $x(x^3/(2 \cdot 3!) - x^7/(2^3 \cdot 7!) + \dots) / (x^2/2! - x^6/(2^2 \cdot 6!) + \dots)$. Para x muy pequeño el segundo miembro es $x \cdot (x^3/12) / (x^2/2) = x^2/6$, y el primer miembro empieza por B_2x^2 , así que $B_2 = 1/6$ sale de inmediato.

Igualar coeficientes como antes da la ecuación ocho, para n par mayor que 2: $c_2B_{n-2}/2 - c_6B_{n-6}/2^3 + c_{10}B_{n-10}/2^5 - \dots + (n/2^{((n+2)/2)}) (-1)^{(n/4)} = 0$, donde el signo es $(-1)^{(n/4)}$ cuando n es múltiplo de 4 y $(-1)^{((n-2)/4)}$ cuando lo es n menos 2. Pruebe con n igual a 6: $15 \times (1/30)/2 - (-1)/8 - 6/16 = 0,25 + 0,125 - 0,375 = 0$. Lo importante

es la cuenta: las ecuaciones dos a cuatro tenían $\frac{1}{2}n$ términos, todas las B anteriores; la ecuación ocho tiene unos $\frac{1}{4}n$, solo una de cada dos. Lo mismo funciona con $\text{tg } \frac{1}{2}x \pm \text{tgh } \frac{1}{2}x$.

$$c_2 \frac{B_{n-2}}{2} - c_6 \frac{B_{n-6}}{2^3} + c_{10} \frac{B_{n-10}}{2^5} - \dots = 0$$

$$n = 6 : \quad 0.25 + 0.125 - 0.375 = 0$$

TG ± TGH: IGUAL

ECS. 2-4

$\frac{n}{2}$

EC. 8

$\frac{n}{4}$

$$n = 4 : \quad 0.5 - 0.5 = 0$$

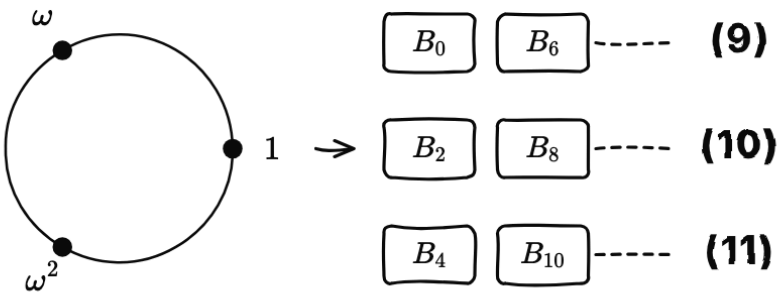
La mitad de términos que antes

Pruébelo

Compruebe en papel la ecuación ocho con n igual a 4: los únicos términos son $c_2B_2/2$ y el último. Con $c_2 = 6$ y $B_2 = 1/6$ se obtiene $6 \times (1/6)/2 - 4/2^3 = 0,5 - 0,5 = 0$.

En la sección cuatro Ramanujan lleva la misma idea de dos a tres, usando las raíces cúbicas de la unidad 1, ω , ω^2 , los tres números cuyo

cubo es 1, con $1 + \omega + \omega^2 = 0$. A partir de la identidad $4 \sin x \sin x\omega \sin x\omega^2 = -(\sin 2x + \sin 2x\omega + \sin 2x\omega^2)$ y de la derivación logarítmica, obtiene mezclas de tres cotangentes, y ahora se cancelan dos términos de cada tres. Los supervivientes dan las ecuaciones nueve, diez y once, por ejemplo $3(B_0 + B_6x^6/6! + B_{12}x^{12}/12! + \dots) = -x(x^2/2! - x^8/8! + \dots) / (x^3/3! - x^9/9! + \dots)$, que conserva solo una B de cada seis índices. Para x muy pequeño su segundo miembro es $-x(x^2/2)/(x^3/6) = -3$, que coincide con $3B_0 = -3$. La ecuación diez conserva B dos, B ocho, B catorce, y su término principal $x(x^4/24)/(x^3/6) = x^2/4$ coincide con $3B_2x^2/2 = x^2/4$; la ecuación once conserva B cuatro, B diez, B dieciséis.



EC. 4

EC. 12

Igualar coeficientes en ellas da la ecuación doce: $c_3B_{n-3} - c_9B_{n-9} + c_{15}B_{n-15} - \dots = 0$, para n impar, cerrada por un último término $\frac{1}{6}n$ o $\frac{1}{3}n$ con un signo que depende del resto de dividir n entre 6. Para n igual a 5 es simplemente $c_3B_2 = 5/3$, es decir, $10 \times 1/6 = 5/3$: pasos de seis, un tercio de los términos de la ecuación cuatro. Por último divide la ecuación diez entre x y deriva, preparando una fórmula de productos para comprobar, que viene a continuación.

Para recordar

Sumar la cotangente y su gemela hiperbólica cancela un término de Bernoulli de cada dos y conserva B cero, B cuatro, B ocho; restarlas conserva B dos, B seis, B diez. El teorema de De Moivre convierte cada mitad en un cociente de series sencillas, las ecuaciones seis y siete, e igualar coeficientes da la ecuación ocho con solo unos n cuartos términos. Las raíces cúbicas de la unidad hacen lo mismo en pasos de tres, así que las ecuaciones nueve a once conservan cada una una B de cada seis índices, y la ecuación doce necesita solo un tercio de los términos del método simple. Los términos principales de estos cocientes comprueban al instante los primeros valores: B cero vale menos uno y B dos, un sexto.

Preguntas

1. ¿Por qué al sumar la cotangente y la cotangente hiperbólica quedan solo B_0 , B_4 , B_8 , ...?

- a. Porque la serie hiperbólica tiene los mismos coeficientes con un signo de cada dos cambiado, así que los términos de B_2 , B_6 , B_{10} se cancelan
 - b. Porque la cotangente hiperbólica vale cero
 - c. Porque B_2 , B_6 , B_{10} valen cero
 - d. Porque el teorema de De Moivre elimina los términos impares
2. ¿Qué le dice el término principal de la ecuación siete?
- a. Que $B_0 = -1$
 - b. Que $B_2 = 1/6$, porque $x \cdot (x^3/12)/(x^2/2) = x^2/6$ coincide con $B_2 x^2$
 - c. Que $B_4 = 1/30$
 - d. Que la serie diverge
3. ¿Cuántos términos necesita la ecuación ocho comparada con las ecuaciones dos a cuatro?
- a. Más o menos los mismos
 - b. Unos n cuartos en lugar de n medios, solo una de cada dos B anteriores
 - c. Un único término
 - d. El doble
4. ¿Por qué las raíces cúbicas de la unidad hacen que se cancelen dos de cada tres términos?
- a. Porque $1 + \omega + \omega^2 = 0$, así que una mezcla de tres cancela todo salvo un término de cada tres
 - b. Porque ω es un número real
 - c. Porque $\cot \omega = 0$

d. Porque todas valen uno

Respuestas

1. **a)** La serie de coth tiene los mismos coeficientes con un signo de cada dos cambiado, así que al sumar las dos se cancelan los términos cuyo índice no es múltiplo de cuatro.
2. **b)** Para x muy pequeño el segundo miembro es $x^2/6$ y el primero empieza por B_2x^2 , así que $B_2 = 1/6$.
3. **b)** Las ecuaciones dos a cuatro tenían $1/2n$ términos, todas las B anteriores; la ecuación ocho tiene unos $1/4n$, solo una de cada dos.
4. **a)** Las tres raíces cúbicas suman cero, así que la mezcla de tres cotangentes conserva solo una hebra de B de cada tres.

Ejemplos resueltos

La ecuación ocho para $n = 6$ Compruebe la ecuación ocho para $n = 6$ con $B_0 = -1$ y $B_4 = 1/30$. Aquí $n - 2 = 4$ es múltiplo de 4, así que el último término es $(6/2^4)(-1)^{((6-2)/4)}$.

Los términos son $c_2B_4/2$ y $-c_6B_0/2^3$, con $c_2 = 15$ y $c_6 = 1$.

$$c_2B_4/2 = 15 \times (1/30)/2 = 0,25.$$

$$-c_6B_0/2^3 = -(-1)/8 = 0,125.$$

$$\text{El último término es } (6/16) \times (-1)^1 = -0,375.$$

La suma es $0,25 + 0,125 - 0,375 = 0$, como exige la ecuación ocho.

Respuesta: 0, así que la ecuación ocho se cumple

Ejercicios

1. Use el término principal de la ecuación seis para hallar B_0 .

Pista: Para x muy pequeño el segundo miembro es $-x \cdot x / (x^2/2)$.

Respuesta: $B_0 = -1$: el segundo miembro tiende a -2 y el primero a $2B_0$.

2. Use la ecuación doce con $n = 5$ para hallar B_2 .

Pista: Para $n = 5$ la ecuación es simplemente $c_3 B_2 = 5/3$, con $c_3 = 10$.

Respuesta: $B_2 = 1/6$: $10B_2 = 5/3$.

3. Use el término principal de la ecuación diez para hallar B_2 otra vez.

Pista: El segundo miembro empieza por $x(x^4/24)/(x^3/6)$; el primero, por $3B_2 x^2/2$.

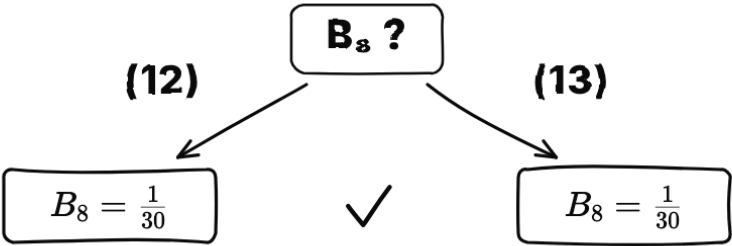
Respuesta: $B_2 = 1/6$: el segundo miembro es $x^2/4$, así que $3B_2/2 = 1/4$.

Una fórmula para comprobar el trabajo, y la tabla

Un contable que suma dos veces una columna larga, una hacia abajo y otra hacia arriba, no pierde el tiempo: dos caminos distintos que coinciden hacen muy improbable un error. Ramanujan incorpora la misma salvaguarda a su método.

$$\frac{1}{3}(n+2)B_n = c_6 B_{n-6} B_6 + c_{12} B_{n-12} B_{12} + \dots$$

(13)



$$\frac{10}{3} B_8 = 28 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{42} = \frac{1}{9}$$

Dos caminos hacia B8

Tras derivar la ecuación diez, la derivada del cociente resulta ser $1 - (x^2/2! - x^8/8! + \dots)(x^4/4! - x^{10}/10! + \dots) / (x^3/3! - x^9/9! + \dots)^2$. Cada una de esas dos fracciones ya se conoce por las ecuaciones nueve

y diez, así que el segundo miembro se convierte en $x^2 + 9(B_0 + B_6x^6/6! + \dots)(B_2x^2/2! + B_8x^8/8! + \dots)$. Igualar el coeficiente de x^n da el resultado trece, válido cuando n menos 2 es múltiplo de 6: $\frac{1}{3}(n + 2)B_n = c_6B_{n-6}B_6 + c_{12}B_{n-12}B_{12} + c_{18}B_{n-18}B_{18} + \dots$. En palabras: una B de la hebra dos, ocho, catorce es igual a una suma de productos de parejas anteriores. De dónde sale: la derivada de un cociente de series puede escribirse mediante los propios cocientes, igual que la derivada de la tangente es uno más la tangente al cuadrado. Para n igual a 8 hay un solo producto: $(10/3)B_8 = 28 \times (1/6) \times (1/42) = 1/9$, así que $B_8 = 1/30$. Ramanujan expone el reparto del trabajo sin rodeos: la ecuación doce calcula las B muy deprisa, y la ecuación trece puede resultar útil para comprobar. Ambas tienen un tercio de los términos de la ecuación cuatro, así que B_{24} solo necesita B_{18} , B_{12} y B_6 .

La sección cinco pone el método a trabajar. Ramanujan quiere estudiar las B por sus propiedades, y para ello necesita primero una reserva de valores, así que pone n igual a 3, 5, 7, 9, etcétera, en la ecuación doce. Cada elección da una ecuación corta, como $B_8 - \frac{1}{3}B_2 = -1/45$. Con $B_2 = 1/6$ esto es $B_8 = 1/18 - 1/45 = 3/90 = 1/30$, el mismo valor que dio el resultado trece. La siguiente es $B_{10} - (5/2)B_4 = -1/132$, así que $B_{10} = 1/12 - 1/132 = 5/66$. Y $B_{12} - 11B_6 = -4/455$ da $B_{12} = 11/42 - 4/455 = 691/2730$.

$$B_8 - \frac{1}{3}B_2 = -\frac{1}{45}$$

$$B_8 = \frac{1}{18} - \frac{1}{45} = \frac{1}{30}$$

$$B_{10} = \frac{1}{12} - \frac{1}{132} = \frac{5}{66}$$

$$B_{12} = \frac{11}{42} - \frac{4}{455} = \frac{691}{2730}$$

$$\frac{11}{42} - \frac{4}{455}$$



0.2531136

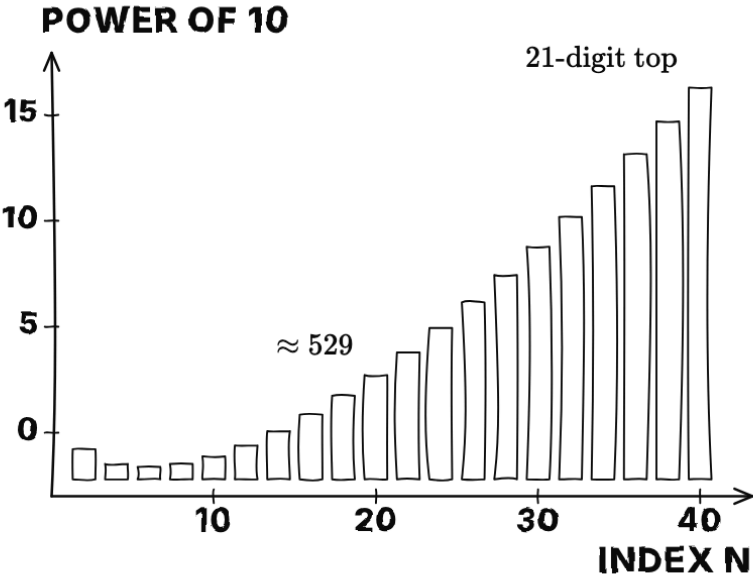
Tres valores a mano

Pruébalo

Tome una calculadora y compruebe el último: once dividido entre cuarenta y dos, menos cuatro dividido entre cuatrocientos cincuenta y cinco. Debería ver $0,2619048 - 0,0087912 = 0,2531136$, y $691/2730$ da las mismas cifras.

Siguiendo así, enumera veinte valores, desde $B_2 = 1/6$ hasta B_{40} . Al principio siguen siendo pequeños, $B_{14} = 7/6$, y luego suben deprisa: $B_{20} = 174611/330$, unos 529, y B_{40} tiene un numerador de 21 cifras sobre un denominador de solo 13530. Los denominadores siguen siendo modestos mientras los numeradores se disparan, y la tabla

termina con la observación de que las B crecen más allá de todo límite. Estas veinte fracciones son la evidencia de la que las secciones siguientes sacan sus patrones.



Veinte valores: pequeños, luego enormes

Para recordar

Derivar la ecuación diez y usar juntas las ecuaciones nueve y diez da el resultado trece, que escribe una B como suma de productos de parejas anteriores. La ecuación doce sirve para calcular de prisas y la ecuación trece para comprobar; ambas necesitan solo un tercio de los términos del método simple, y para B ocho ambas dan un treintavo. Poniendo n igual a 3, 5, 7, etcétera, en la ecuación doce, Ramanujan obtiene una tabla de veinte B: primero fracciones pequeñas, luego números con numeradores de veinte cifras o más.

Preguntas

1. ¿Para qué sirve el resultado trece, según Ramanujan?
 - a. Para calcular las B lo más de prisa posible
 - b. Para comprobar los cálculos hechos con la ecuación doce
 - c. Para hallar los denominadores
 - d. Para demostrar que las B son positivas
2. ¿Por qué calcula Ramanujan una tabla de las B en la sección cinco?
 - a. Para estudiar las B por sus propiedades necesita primero una reserva de valores
 - b. Porque de otro modo no puede usarse la ecuación doce
 - c. Para comprobar el valor de π
 - d. Porque la tabla demuestra sus afirmaciones posteriores

3. ¿Qué muestra la tabla sobre el tamaño de las B?
- a. Que disminuyen hacia cero
 - b. Que se mantienen por debajo de uno
 - c. Que al principio son pequeñas y luego crecen muy deprisa, mientras los denominadores siguen siendo modestos
 - d. Que todas son números enteros

Respuestas

1. **b)** La ecuación doce calcula las B muy deprisa, y la ecuación trece puede resultar útil para comprobar.
2. **a)** Quiere estudiar las B por sus propiedades, y para ello necesita primero una reserva de valores.
3. **c)** Los valores son pequeños al principio y luego suben deprisa; los denominadores siguen siendo modestos mientras los numeradores se disparan.

Ejemplos resueltos

B₈ de dos maneras Halle B₈ con el resultado trece para n = 8, y otra vez con la ecuación de la sección cinco $B_8 - \frac{1}{3}B_2 = -\frac{1}{45}$, usando $B_2 = \frac{1}{6}$ y $B_6 = \frac{1}{42}$.

El resultado trece para n = 8 tiene un solo producto: $(\frac{10}{3})B_8 = c_6B_2B_6$ con $c_6 = 28$.

$$28 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{42} = \frac{1}{9}, \text{ así que } B_8 = (\frac{1}{9}) \times (\frac{3}{10}) = \frac{1}{30}.$$

La ecuación de la sección cinco da $B_8 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} - \frac{1}{45} = \frac{1}{18} - \frac{1}{45}$.

$$\frac{1}{18} - \frac{1}{45} = \frac{5}{90} - \frac{2}{90} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}.$$

Respuesta: $B_8 = \frac{1}{30}$ por ambos caminos

Ejercicios

1. A partir de $B_{10} - (5/2)B_4 = -1/132$ y de $B_4 = 1/30$, halle B_{10} .

Pista: Cinco medios de un treintavo es un doceavo.

Respuesta: $B_{10} = 1/12 - 1/132 = 11/132 - 1/132 = 10/132 = 5/66$.

2. A partir de $B_{12} - 11B_6 = -4/455$ y de $B_6 = 1/42$, halle B_{12} como fracción.

Pista: Use el denominador común $2730 = 42 \times 65 = 455 \times 6$.

Respuesta: $B_{12} = 11/42 - 4/455 = 715/2730 - 24/2730 = 691/2730$.

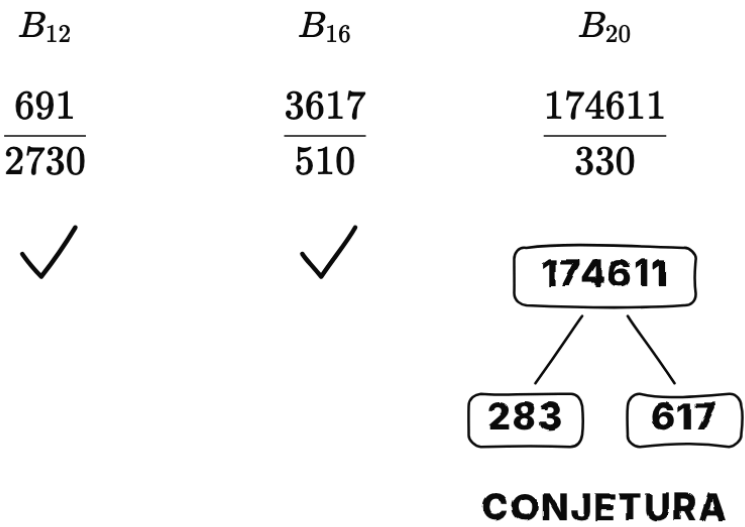
3. ¿Más o menos cuánto vale $B_{20} = 174611/330$?

Pista: Divida 174611 entre 330.

Respuesta: Unos 529,1, ya que $330 \times 529 = 174570$ y el resto es 41.

Patrones leídos en la tabla

Mire otra vez la tabla: $B_{12} = 691/2730$, $B_{16} = 3617/510$, $B_{20} = 174611/330$. Todos los denominadores son pares y divisibles por tres, y los denominadores son pequeños y ordenados, mientras que los numeradores parecen aleatorios. Ramanujan enuncia ahora lo que observa, para todo n par distinto de cero, y tiene cuidado de llamar observaciones a estas cosas: promete las razones más adelante, en la sección doce.



Tres ejemplares, una regla rota

Afirmación catorce: B_n es una fracción, y el numerador de B_n/n simplificado es primo. Para B_{12} ese numerador es 691, un primo, y para B_{16} es 3617, también primo. Pero al seguir comprobando se rompe: para B_{20} el numerador $174611 = 283 \times 617$, así que no es primo, y los editores de los artículos reunidos clasifican esta afirmación como conjetura.

Afirmación quince: el denominador de B_n contiene el 2 y el 3 exactamente una vez cada uno, como ocurre con 6, 30, 42 y 2730.

Afirmación dieciséis: $2^n(2^n - 1)B_n/n$ es un número entero, y por tanto $2(2^n - 1)B_n$ es un entero impar. Para n igual a 6: $2 \times 63 \times 1/42 = 3$, impar, como se prometía; para n igual a 12: $2 \times 4095 \times 691/2730 = 2073$, impar de nuevo. De esto deduce la afirmación diecisiete: si n no es múltiplo de 4, entonces $4(2^n - 1)B_n/n$ es impar; para n igual a 6 vale $4 \times 63/(42 \times 6) = 1$. La afirmación dieciocho se sigue de la catorce: un primo que divide a n pero falta en el denominador divide al numerador, con un cociente primo.

$$B_{22} = \frac{854513}{138} \quad \boxed{11} \quad 6 : \text{all}$$

$$5 : B_4, B_8, B_{12}$$

$$7 : B_6, B_{12}, B_{18}$$

$$11 : B_{10}, B_{20}, B_{30}$$

77683

131

593

El once sube arriba

Sus ejemplos: el 11 divide a 22 pero no al denominador 138 de B₂₂, así que el 11 divide a su numerador; el 13, el 17 y el 19 hacen lo mismo con B₂₆, B₃₄ y B₃₈. Las partes de divisibilidad son correctas, pero los cocientes que se dicen primos no resisten todos: para B₂₂ el cociente es $77683 = 131 \times 593$.

La sección siete pasa a los denominadores. Todos son divisibles por 6; los de B₄, B₈, B₁₂, por 5; los de B₆, B₁₂, B₁₈, por 7; los de B₁₀, B₂₀, B₃₀, por 11. De ahí infiere la afirmación diecinueve: el denominador de B_n es el producto de los primos que son uno más que un divisor de n, incluidos la unidad y n. Para B₂₄: los divisores 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 más uno dan 2, 3, 4, 5, 7, 9, 13, 25; se conservan los primos 2, 3, 5, 7, 13, y el producto es 2730. Los divisores impares distintos de la unidad

pueden saltarse, porque uno más que un número impar es par y, por tanto, no es primo. Entre sus otros ejemplos están B₂₀, cuyos primos 2, 3, 5, 11 dan 330, y B₇₂, cuyo denominador es 140100870.

UN TEOREMA

+1 ↓

1	2	3	4	6	8	12	24
2	3	~~4~~	5	7	~~9~~	13	~~25~~

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 2730$$

$$B_{20} : 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 330$$

$$B_{30} : 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31 = 14322$$

La afirmación diecinueve en acción

Pruébelo

Con lápiz y papel, halle con la regla el denominador de B₃₀. La unidad y los divisores pares son 1, 2, 6, 10, 30; uno más da 2, 3, 7, 11, 31, todos primos, y su producto es 14322, exactamente el denominador de su tabla.

La regla de los denominadores y las afirmaciones quince y dieciséis son de hecho ciertas; los editores señalan que la regla que hay detrás ya la conocían Clausen y von Staudt, y la afirmación de los impares, Euler.

Para recordar

A partir de su tabla, Ramanujan enuncia patrones para las B de índice par: numeradores primos tras dividir entre n , los factores 2 y 3 exactamente una vez en cada denominador, y números enteros e impares contruidos con $2^n - 1$. El denominador de B_n es el producto de los primos que son uno más que un divisor de n ; para B veinticuatro eso da 2730. Se enuncian como observaciones: los patrones del denominador y de los impares son ciertos y ya se conocían, pero la afirmación del numerador primo falla, por ejemplo $174611 = 283 \times 617$.

Preguntas

1. ¿Cómo deben entenderse las afirmaciones de la sección seis?
 - a. Como teoremas demostrados
 - b. Como observaciones leídas en la tabla, con las razones prometidas para más adelante
 - c. Como definiciones
 - d. Como resultados citados de Edwards
2. ¿Por qué falla la afirmación catorce para $n = 20$?

- a. Porque B_{20} es un entero
 - b. Porque el numerador 174611 es igual a 283×617 , así que no es primo
 - c. Porque 20 es múltiplo de 4
 - d. Porque el denominador de B_{20} no es divisible por 3
3. ¿Qué dice la afirmación diecinueve sobre el denominador de B_n ?
- a. Que es $n + 1$
 - b. Que es el producto de los primos que son uno más que un divisor de n , incluidos la unidad y n
 - c. Que siempre es 6
 - d. Que es el mayor primo menor que n
4. ¿Por qué pueden saltarse en la regla de los denominadores los divisores impares distintos de la unidad?
- a. Porque uno más que un número impar es par y, por tanto, no es primo
 - b. Porque los divisores impares nunca dividen a n
 - c. Porque dan el numerador
 - d. Porque siempre valen 1

Respuestas

1. **b)** Ramanujan enuncia lo que observa y tiene cuidado de llamarlo observación, prometiendo las razones más adelante, en la sección doce.
2. **b)** Para B_{20} el numerador $174611 = 283 \times 617$, así que no es primo, y los editores clasifican la afirmación como conjetura.

3. b) Afirmación diecinueve: el denominador de B_n es el producto de los primos que son uno más que un divisor de n , incluidos la unidad y n .

4. a) Uno más que un número impar es par y, por tanto, no es primo, así que nunca entra en el producto.

Ejemplos resueltos

La afirmación dieciséis para $n = 12$ Compruebe que $2(2^{12} - 1)B_{12}$ es un entero impar, con $B_{12} = 691/2730$.

$$2^{12} - 1 = 4095.$$

$$2 \times 4095 = 8190, \text{ y } 8190/2730 = 3.$$

$$\text{Así que } 2(2^{12} - 1)B_{12} = 3 \times 691 = 2073.$$

2073 es impar, como dice la afirmación dieciséis.

Respuesta: 2073, un entero impar

Ejercicios

1. Use la afirmación diecinueve para hallar el denominador de B_{12} .

Pista: La unidad y los divisores pares de 12 son 1, 2, 4, 6, 12; sume uno a cada uno.

Respuesta: 2730: uno más da 2, 3, 5, 7, 13, todos primos, y su producto es 2730.

2. Compruebe la afirmación diecisiete para $n = 10$: ¿es $4(2^{10} - 1)B_{10}/10$ un entero impar? Use $B_{10} = 5/66$.

$$\textbf{Pista: } 2^{10} - 1 = 1023 = 3 \times 11 \times 31.$$

Respuesta: Sí: $4 \times 1023 \times 5/(66 \times 10) = 20460/660 = 31$, que es impar.

3. Para $B_{22} = 854513/138$, compruebe que el 11 divide al numerador y halle el cociente.

Pista: Divida 854513 entre 11.

Respuesta: $854513 = 11 \times 77683$, así que el 11 lo divide; el cociente 77683 es 131×593 , que no es primo, al contrario de lo que se afirma.

La parte fraccionaria, y un número fijado por su tamaño

Suponga que un amigo le dice que una fracción misteriosa vale un poco más de seis mil, que su denominador es 138 y que su numerador es divisible por once. Eso casi basta para identificarla exactamente. Esta parte muestra cómo lo hace Ramanujan exactamente con un número de Bernoulli, y luego trae las herramientas que estiman su tamaño.

$$(-1)^{n/2} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots \right) - (-1)^{n/2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17} - 1 = \frac{47}{510}$$

$$3617 = 7 \cdot 510 + 47$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{23} = \frac{17}{138}$$

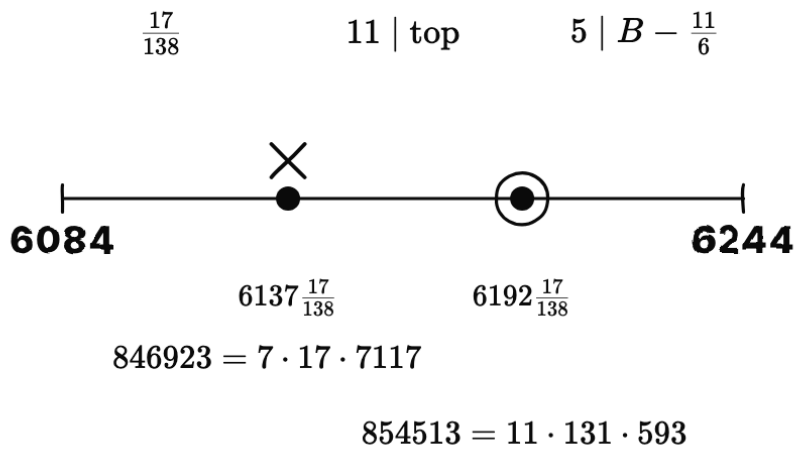
La parte fraccionaria a partir de primos

Primero la parte fraccionaria, lo que queda de B_n tras quitarle su parte entera. La afirmación veinte dice: la parte fraccionaria de B_n es $(-1)^{(n/2)}(1/p_1 + 1/p_2 + \dots) - (-1)^{(n/2)}$. En palabras: se suma uno entre cada primo del denominador y se resta uno, cambiando el signo de todo cuando n medios es impar. De dónde sale: toda fracción cuyo denominador es un producto de primos distintos puede descomponerse en piezas sencillas con un primo cada una, y la regla dice que estas piezas son siempre más o menos uno entre el primo. Para $B_{16} = 3617/510$ los primos son 2, 3, 5, 17, y $1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/17 - 1 = 47/510$; en efecto, $3617 = 7 \times 510 + 47$. Para B_{22} el signo se invierte: $1 - 1/2 - 1/3 - 1/23 = 17/138$.

De aquí se sigue la afirmación veintiuno: si G es el máximo común divisor y L el mínimo común múltiplo de los denominadores de B_m y B_n , entonces L/G es el denominador de $B_m - (-1)^{((m-n)/2)}B_n$. En particular, denominadores iguales hacen entera esa diferencia: $B_{24} - B_{12}$ es un entero, ya que ambos tienen 2730 abajo, mientras que $B_{10} + B_{20}$ tiene denominador $330/66 = 5$. Añade la afirmación veintidós: si n es múltiplo de 4, el numerador de $B_n - 1/30$ es divisible por 20, como en $B_{12} - 1/30 = 600/2730 = 20/91$; si no, el numerador de $B_n/n - 1/12$ es divisible por 5. Y la afirmación veintitrés: ciertos números como $2(2^{4n+2} - 1)B_{4n+2}/(2n + 1)$ son enteros de la forma $30p + 1$; para n igual a 1 vale $2 \times 63 \times (1/42)/3 = 1$.

La sección diez lo junta todo. Suponga que lo único que sabe es que B_{22} está entre 6084 y 6244. Su parte fraccionaria debe ser $17/138$, su numerador debe ser divisible por 11 y $B_{22} - 11/6$ debe ser divisible por 5. De los 160 números enteros de ese intervalo solo sobreviven dos: 6137 $17/138$ y 6192 $17/138$. Ramanujan elige el segundo porque el primero tiene un numerador divisible además por 7 y por 17, y él espera que el numerador dividido entre 11 sea primo. La respuesta,

854513/138, es correcta, pero la razón es endeble: $854513 = 11 \times 131 \times 593$, así que el cociente tampoco es primo.



Dos supervivientes de 160

Pruébelo

Con una calculadora, divide 846923, el numerador del primer candidato, entre 7 y luego entre 17. Ambas divisiones son exactas, y por eso Ramanujan descartó ese candidato.

Para obtener esos límites necesita, para empezar, el tamaño de B_n , y la sección once lo proporciona: $B_n = (2 \cdot n!/(2\pi)^n)(1/1^n + 1/2^n + 1/3^n + \cdots)$, la ecuación veinticuatro. En palabras: un número de Bernoulli es

un factorial dividido entre una potencia de 2π , por una suma que es apenas mayor que uno. Para n igual a 2: $2 \times 2/(4\pi^2) \times \pi^2/6 = 1/6$, usando la famosa suma de uno entre los cuadrados. La misma suma puede escribirse como un producto sobre los primos, y es igual a una integral: $B_n/(2n) = \int_0^\infty x^{n-1}/(e^{2\pi x} - 1) dx$, la ecuación veinticinco, que se demuestra desarrollando la fracción como una serie geométrica. Añade dos integrales parecidas, una de ellas con un logaritmo, la ecuación veintiséis.

$$B_n = \frac{2\,n!}{(2\pi)^n} \left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots\right)$$

$$\frac{2 \cdot 2}{4\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{B_n}{2n} = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{e^{2\pi x} - 1} dx$$

$$24.17714 - 10 + 0.91894 + 0.00833 = 15.10441$$

$$\log 3628800 = 15.10441$$

El tamaño a partir de un factorial

Luego toma logaritmos en la ecuación veinticuatro y usa el desarrollo clásico de $\log n!$: $(n + \frac{1}{2}) \log n - n + \frac{1}{2} \log 2\pi + B_2/(1 \cdot 2n) - B_4/(3 \cdot 4n^3) + \cdots$, la ecuación veintisiete, con el error tras cualquier término controlado por un factor θ entre 0 y 1. Para n igual a 10, los

primeros términos dan $24,17714 - 10 + 0,91894 + 0,00833 = 15,10441$, y $\log 10! = \log 3628800 = 15,10441$ coincide. Así, la parte entera de B_n puede hallarse a partir de su tamaño, y la parte fraccionaria con la afirmación veinte; la pega, observa, es que esto exige logaritmos con más decimales de los que dan las tablas, una dificultad que elimina la sección trece.

Para recordar

La parte fraccionaria de B_n es más o menos la suma de uno entre cada primo de su denominador, menos uno, así que denominadores iguales hacen entera la diferencia con signo de dos B. Combinados con reglas de divisibilidad, unos límites aproximados fijan exactamente una B, como en $B_{22} = 854513/138$, aunque el argumento del cociente primo que se usa ahí no es sólido. La ecuación veinticuatro da el tamaño de B_n mediante un factorial, una potencia de dos pi y una suma de inversos de potencias, y el desarrollo del logaritmo de n factorial lo convierte en un cálculo que necesita logaritmos muy precisos.

Preguntas

1. ¿Qué dice la afirmación veinte sobre la parte fraccionaria de B_n ?
 - a. Que es uno entre n
 - b. Que es más o menos la suma de uno entre cada primo del denominador, menos uno
 - c. Que siempre es un medio

- d. Que es el numerador dividido entre n
2. ¿Por qué descarta Ramanujan el candidato $6137 \frac{17}{138}$ para B_{22} ?
 - a. Porque está fuera de los límites
 - b. Porque su numerador es divisible por 7 y por 17 además de por 11, y él espera que el cociente entre 11 sea primo
 - c. Porque su parte fraccionaria es errónea
 - d. Porque no es divisible por 5
 3. ¿Qué nos dice la ecuación veinticuatro sobre el tamaño de B_n ?
 - a. Que es un factorial dividido entre una potencia de 2π , por una suma apenas mayor que uno
 - b. Que siempre es menor que uno
 - c. Que es igual a n al cuadrado
 - d. Que es la cantidad de primos menores que n
 4. ¿Qué dificultad práctica señala Ramanujan al calcular la parte entera con la ecuación veintisiete?
 - a. Que necesita logaritmos con más decimales de los que dan las tablas
 - b. Que necesita el valor de B_0
 - c. Que solo funciona para n impar
 - d. Que requiere una tabla de primos

Respuestas

1. b) Se suma uno entre cada primo del denominador y se resta uno, cambiando el signo de todo cuando n medios es impar.

2. b) Elige el segundo porque el primero tiene un numerador divisible además por 7 y por 17, y él espera que el numerador dividido entre 11 sea primo.

3. a) Un número de Bernoulli es un factorial dividido entre una potencia de 2π , por una suma que es apenas mayor que uno.

4. a) La pega es que esto exige logaritmos con más decimales de los que dan las tablas, una dificultad que elimina la sección trece.

Ejemplos resueltos

B₂ con la ecuación veinticuatro Use la ecuación veinticuatro con $n = 2$ y la suma $1/1^2 + 1/2^2 + \cdots = \pi^2/6$ para hallar B₂.

La ecuación veinticuatro dice $B_2 = (2 \cdot 2!/(2\pi)^2)(1/1^2 + 1/2^2 + \cdots)$.

$2 \cdot 2! = 4$ y $(2\pi)^2 = 4\pi^2$, así que el factor es $4/(4\pi^2) = 1/\pi^2$.

Multiplicar por $\pi^2/6$ da $1/6$.

Respuesta: $B_2 = 1/6$

Ejercicios

1. Use la afirmación veinte para hallar la parte fraccionaria de B₂₈, cuyo denominador es $870 = 2 \times 3 \times 5 \times 29$, sabiendo que la mitad de 28 es par.

Pista: Sume uno entre cada primo y reste uno.

Respuesta: $1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/29 - 1 = (435 + 290 + 174 + 30 - 870)/870 = 59/870$.

2. Compruebe la afirmación veintidós para $n = 10$: ¿es el numerador de $B_{10}/10 - 1/12$ divisible por 5? Use $B_{10} = 5/66$.

Pista: $B_{10}/10 = 1/132$, y $1/12 = 11/132$.

Respuesta: Sí: $1/132 - 11/132 = -10/132 = -5/66$, cuyo numerador 5 es divisible por 5.

3. Con los primeros términos de la ecuación veintisiete, estime $\log 10!$ y compárelo con el valor verdadero 15,10441.

Pista: Calcule $10,5 \times \log 10 - 10 + \frac{1}{2} \log 2\pi + B_2/(2 \times 10)$ con $\log 10 = 2,302585$ y $\frac{1}{2} \log 2\pi = 0,918939$.

Respuesta: $24,177144 - 10 + 0,918939 + 0,008333 = 15,104416$, que coincide con 15,10441.

Una demostración que cuelga de una sola afirmación

Sume $1/11^2 + 1/12^2 + 1/13^2 + \dots$ y obtendrá unos 0,0951663. Hay un atajo: $1/10 - 1/(2 \times 10^2) + (1/6)/10^3 = 0,0951667$, ya correcto hasta la sexta cifra decimal. Ese atajo está construido con números de Bernoulli, y en la sección doce Ramanujan intenta usar series así para demostrar los patrones que había observado.

$$\frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{13^2} + \dots$$

$$\approx 0.0951663$$

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{2 \cdot 10^2} + \frac{1/6}{10^3} = 0.0951667$$

$$\frac{1}{6} = B_2$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{B_2}{n^3} - \frac{B_4}{n^5} + \frac{B_6}{n^7} - \dots$$

$$\text{remainder} = \int_0^\infty \dots \sinh^2 \pi n x \dots$$

$$\text{next term: } B_4/10^5 \approx 3 \cdot 10^{-7}$$

$$\dots + \frac{B_{2p} \theta}{n^{2p+1}}, \quad 0 < \theta < 1$$

Un atajo construido con B

Su punto de partida es la ecuación veintinueve, la segunda derivada de $\log \Gamma(n+1)$, el logaritmo del factorial: $1/(n+1)^2 + 1/(n+2)^2 + \dots$

$= 1/n - 1/(2n^2) + B_2/n^3 - B_4/n^5 + B_6/n^7 - \dots$. En palabras: la cola de la suma de inversos de cuadrados, empezando después de n , es una serie en potencias de $1/n$ cuyos coeficientes son los números de Bernoulli. Sale de derivar dos veces el desarrollo de $\log n!$ de la parte anterior. Con n igual a 10 da el atajo de antes, y el término siguiente, $B_4/10^5 \approx 0,0000003$, muestra lo deprisa que disminuye el error.

La serie no converge indefinidamente, así que se detiene tras algún término y escribe el resto como $B_{2p}\theta/n^{(2p+1)}$, con θ entre 0 y 1. En palabras: el error tras detenerse es una fracción del primer término omitido, nunca más. Lo respalda con una fórmula integral del resto, en la que aparece $\sinh^2 \pi nx$, de modo que el tamaño del error queda controlado.

Ahora la idea principal. Escribe la ecuación veintiocho, una combinación de esa misma cola, el término $1/(2x^2) - 1/x$ y una suma sobre primos: $-1/(6(x^3 - x)) + 1/(5(x^5 - x)) + 1/(7(x^7 - x)) + 1/(11(x^{11} - x)) + \dots$. Afirma que toda esta expresión se desarrolla en potencias de $1/x$ con coeficientes enteros, empezando por $1/x^{15} - 7/x^{17} + 55/x^{19} - 529/x^{21} + \dots$. Si eso fuera cierto, comparar coeficientes haría que $B_2 - 1/6$, $-B_4 - 1/6 + 1/5$, $B_6 - 1/6 + 1/7$, etcétera, fueran todos enteros. Compruébelos: $1/6 - 1/6 = 0$, $-1/30 - 5/30 + 6/30 = 0$, $1/42 - 7/42 + 6/42 = 0$, y para $B_{14} = 7/6$, $7/6 - 1/6 = 1$, exactamente el primer coeficiente del segundo miembro. Escribir $-1/6$ como $1/2 + 1/3 - 1$ convierte esto en la afirmación veinte, la regla de la parte fraccionaria, y de ella se sigue la afirmación veintiuno.

ECUACIÓN (28)

$$\left[\frac{1}{(x+1)^2} + \dots \right] + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{6(x^3-x)} + \frac{1}{5(x^5-x)} + \frac{1}{7(x^7-x)} + \dots$$



$$= \frac{1}{x^{15}} - \frac{7}{x^{17}} + \frac{55}{x^{19}} - \frac{529}{x^{21}} + \dots \quad \text{¿ENTEROS?}$$

$$B_2 - \frac{1}{6}, \quad -B_4 - \frac{1}{6} + \frac{1}{5}, \quad B_6 - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}, \dots \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$$

$$-\frac{1}{30} - \frac{5}{30} + \frac{6}{30} = 0$$

$$\frac{1}{42} - \frac{7}{42} + \frac{6}{42} = 0$$

$$B_{14} : \frac{7}{6} - \frac{1}{6} = 1$$

$$B_{10} : \frac{5}{66} - \frac{11}{66} + \frac{6}{66} = 0$$

$$-\frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1$$

AFIRMACIÓN 20

$$B_{10} - \frac{1}{6} + \frac{1}{11} ?$$

La afirmación y sus comprobaciones

Pruébalo

Compruebe usted mismo un coeficiente más: $B_{10} - \frac{1}{6} + \frac{1}{11}$, con $B_{10} = 5/66$. Con denominador 66 es $5/66 - 11/66 + 6/66 = 0$, un entero, como exige la afirmación.

Repita el truco dos veces. Sustituya n por $\frac{1}{2}n$ en la ecuación veintinueve y reste la mitad del resultado de la cola alterna $1/(n+1)^2 - 1/(n+2)^2 + \dots$, la ecuación treinta, cuyos coeficientes son $(2^{(2p)} - 1)B_{2p}$; si el doble de esa cola tuviera coeficientes enteros, se seguiría la segunda parte de la afirmación dieciséis, que $2(2^n - 1)B_n$ es impar. De la primera derivada de $\log n!$, la ecuación treinta y uno con la

constante de Euler γ , obtiene la ecuación treinta y dos para $1/(n + 2) - 1/(n + 4) + 1/(n + 6) - \dots$; unos coeficientes enteros ahí darían la primera parte de la afirmación dieciséis.

Todos los caminos terminan con «si podemos demostrar», y nunca lo hace. Los editores señalan que estas afirmaciones de coeficientes enteros nunca se demuestran, y que algunos pasos usan series divergentes, así que los argumentos son esbozos; los resultados en sí son ciertos y los conocían von Staudt y Clausen, y Euler.

Para recordar

La cola de la suma de inversos de cuadrados tiene una serie en potencias de uno entre n con coeficientes de Bernoulli, y truncarla deja un error controlado por un factor θ entre 0 y 1. Ramanujan reduce la regla de la parte fraccionaria y las afirmaciones de los impares a afirmaciones de que ciertas series tienen coeficientes enteros; los primeros coeficientes salen, en efecto, 0, 0, 0 y luego 1. Esas afirmaciones nunca se demuestran en el artículo, así que la sección doce es un camino hacia demostraciones, no una demostración.

Preguntas

1. ¿Qué expresa la ecuación veintinueve?
 - a. La cola de la suma de inversos de cuadrados como serie en potencias de $1/n$ con coeficientes de Bernoulli
 - b. El valor de π

- c. El denominador de toda B_n
 - d. La suma de todos los números de Bernoulli
2. ¿Qué le dice el factor θ entre 0 y 1?
- a. Que el error tras detenerse es una fracción del primer término omitido
 - b. Que la serie converge a θ
 - c. Que todos los coeficientes están entre 0 y 1
 - d. Que los números de Bernoulli son menores que 1
3. ¿Por qué la sección doce es un camino hacia demostraciones y no una demostración?
- a. Porque las afirmaciones sobre coeficientes enteros en las que se apoya nunca se demuestran
 - b. Porque los coeficientes comprobados a mano son erróneos
 - c. Porque los patrones son falsos
 - d. Porque no usa números de Bernoulli

Respuestas

1. a) La cola de la suma de inversos de cuadrados, empezando después de n , es una serie en potencias de $1/n$ cuyos coeficientes son los números de Bernoulli.
2. a) El error tras detenerse es una fracción del primer término omitido, nunca más.
3. a) Todos los caminos terminan con «si podemos demostrar», y las afirmaciones de coeficientes enteros nunca se demuestran en el artículo.

Ejemplos resueltos

La cola para $n = 10$ Estime $1/11^2 + 1/12^2 + 1/13^2 + \dots$ con los primeros términos de la ecuación veintinueve para $n = 10$, y diga cuánto vale el término siguiente.

Los primeros términos son $1/n - 1/(2n^2) + B_2/n^3$ con $B_2 = 1/6$.

Para $n = 10$ eso es $0,1 - 0,005 + 0,000167 = 0,095167$.

El término siguiente es $-B_4/n^5 = -(1/30)/100000$, unos $-0,0000003$.

Así que la cola vale unos $0,0951663$, y el error tras tres términos es como mucho de unas tres diezmillonésimas.

Respuesta: Unos $0,0951663$

Ejercicios

1. Compruebe que el coeficiente $B_6 - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ es un entero, con $B_6 = 1/42$.

Pista: Ponga todo con denominador 42.

Respuesta: $1/42 - 7/42 + 6/42 = 0$, un entero.

2. Compruebe que el coeficiente $B_{14} - \frac{1}{6}$ es igual al primer coeficiente, 1, del segundo miembro de la ecuación veintiocho, con $B_{14} = 7/6$.

Pista: Reste un sexto a siete sextos.

Respuesta: $7/6 - 1/6 = 1$, que coincide con el término $1/x^{15}$.

3. Explique con palabras cómo escribir $-\frac{1}{6}$ como $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1$ convierte los coeficientes enteros en la regla de la parte fraccionaria.

Pista: Fíjese en qué inversos de primos aparecen.

Respuesta: Cada coeficiente entero es $\pm B_n$ más uno entre cada primo que le corresponde, con $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ procedentes de $-\frac{1}{6}$, menos uno. Decir que el total es un número entero significa que la parte fraccionaria de B_n es $\pm$ esa suma de inversos menos uno, que es la afirmación veinte.

Cuántas cifras, y el valor siguiente a partir del anterior

¿Cuántas cifras tiene 2^{100} ? No hace falta multiplicarlo: $100 \times \log_{10} 2 = 30,103$, así que tiene 31 cifras, y como $10^{0,103} \approx 1,268$, empieza por 126. Ramanujan hace lo mismo con números de Bernoulli demasiado grandes para escribirlos.

$$2^{100}$$

$$100 \times \log_{10} 2 = 30.103 \Rightarrow 31 \text{ digits}$$

$$10^{0.103} \approx 1.268 \Rightarrow \text{starts } 126$$

$$\log_{10} B_n \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \log_{10} n - 1.2324743503 n + 0.700120$$

$$\text{true value} \approx \dots + 0.0362/n$$

$$\log_e B_n \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \log_e n - n(1 + \log_e 2\pi) + \frac{1}{2} \log_e 8\pi$$

$$(1 + \log_e 2\pi) \times 0.4342945 = 1.2324744$$

$$20.5 \times 1.30103 - 24.64949 + 0.70012 = 2.72175$$

$$+ 0.0018 = 2.72356, \quad 10^{2.72356} \approx 529.1$$

Cifras a partir de un logaritmo

Resultado treinta y tres: $\log_{10} B_n = (n + \frac{1}{2}) \log_{10} n - 1,2324743503 n + 0,700120$, siendo el valor verdadero mayor en unos $0,0362/n$. En palabras: el número de cifras de B_n crece un poco más deprisa que n

por el número de cifras de n . De dónde sale: se toman logaritmos en la ecuación veinticuatro, se sustituye $\log n!$ por sus términos principales, lo que da $\log_e B_n \approx (n + 1/2) \log_e n - n(1 + \log_e 2\pi) + 1/2 \log_e 8\pi$, y se multiplica por $\log_{10} e = 0,4342944819$ para pasar a base diez. Compruebe la constante: $(1 + \log_e 2\pi) \times 0,4342945 = 2,8378771 \times 0,4342945 = 1,2324744$. Para n igual a 20: $20,5 \times 1,30103 - 24,64949 + 0,70012 = 2,72175$; sumar $0,0362/20 = 0,0018$ da $2,72356$, y $10^{2,72356} \approx 529,1$, exactamente el tamaño de B_{20} .

La sección catorce compara vecinos. Dividir la ecuación veinticuatro para n entre la misma para n menos 2 da la ecuación treinta y cuatro: $B_n = (n(n-1)/(4\pi^2)) B_{n-2} (1 - (2^2 - 1)/(2^n - 1))(1 - (3^2 - 1)/(3^n - 1)) \cdots$. En palabras: cada B es la anterior por $n(n-1)/(4\pi^2)$, corregida por factores que valen casi exactamente 1 en cuanto n es moderadamente grande. Así, resultado treinta y cinco, el cociente B_n/B_{n-2} se aproxima muy rápidamente a $n(n-1)/(4\pi^2)$.

VECINOS

$$B_n = \frac{n(n-1)}{4\pi^2} B_{n-2} \underbrace{\left(1 - \frac{3}{2^n - 1}\right) \left(1 - \frac{8}{3^n - 1}\right) \cdots}_{\approx 1}$$

$$\frac{B_n}{B_{n-2}} \rightarrow \frac{n(n-1)}{4\pi^2}$$



B_{20}

$$B_{20} \in (529, 530) \rightarrow \frac{174611}{330}$$

B_{18}

B_{16}

$$6.079 \times \frac{7}{6} \approx 7.09 \Rightarrow 7 < B_{16} < 8$$

B_{14}

$$B_{16} = 7 \frac{47}{510} = \frac{3617}{510}$$

Una escalera de cocientes

Esto da una escalera. Se multiplica la B anterior por $n(n-1)/(4\pi^2)$ para saber entre qué dos números enteros está la siguiente, y luego se añade la parte fraccionaria de la afirmación veinte. Para B_{16} : $(15 \times 16/(4\pi^2)) \times 7/6 = 6,079 \times 1,1667 \approx 7,09$, entre 7 y 8; la parte fraccionaria es $47/510$, así que $B_{16} = 7 \frac{47}{510} = 3617/510$. La tabla de Ramanujan lo hace peldaño a peldaño hasta B_{20} , que está entre 529 y 530 y sale $528 + 1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/11 = 174611/330$.

Pruébalo

Con una calculadora, multiplique $43867/798$, el valor de B_{18} , por $380/(4\pi^2)$. Debería obtener unos 529,1, así que B_{20} está entre 529 y 530, como dice la tabla.

$$\frac{43867}{798} \times \frac{380}{4\pi^2}$$
$$\approx 529.1$$

$$529 < B_{20} < 530$$



digits from $\log_{10} B_n$

$$\frac{B_n}{B_{n-2}} \rightarrow \frac{n(n-1)}{4\pi^2}$$

whole part + fraction = exact

Pruébalo con una calculadora

Para recordar

El resultado treinta y tres da el logaritmo de B_n , y por tanto su número de cifras y sus primeras cifras, solo a partir de n ; para B veinte predice unos 529. La ecuación treinta y cuatro dice que cada B es la anterior por $n(n-1)/(4\pi^2)$, por unos factores de corrección cercanos a 1, así que el cociente se estabiliza deprisa. Multiplicar para hallar entre qué dos números enteros está una B , y añadir la parte fraccionaria de la afirmación veinte, da su valor exacto peldaño a peldaño.

Preguntas

1. ¿De dónde sale el resultado treinta y tres?
 - a. De tomar logaritmos en la ecuación veinticuatro, quedarse con los términos principales de $\log n!$ y pasar a base diez
 - b. De la tabla de denominadores
 - c. De la ecuación doce
 - d. De las raíces cúbicas de la unidad
2. ¿Qué dice la ecuación treinta y cuatro sobre B_n comparada con B_{n-2} ?
 - a. Que B_n es B_{n-2} por $n(n-1)/(4\pi^2)$, por unos factores de corrección cercanos a 1
 - b. Que B_n es el doble de B_{n-2}
 - c. Que B_n es B_{n-2} más uno
 - d. Que B_n es B_{n-2} dividido entre π

3. ¿Cómo produce valores exactos la escalera de la sección catorce?
- Hallando, a partir de la B anterior, entre qué dos números enteros está una B, y añadiendo luego la parte fraccionaria de la afirmación veinte
 - Redondeando al entero más cercano
 - Usando solo el denominador
 - Calculando $\log_{10} e$

Respuestas

- 1. a)** Se toman logaritmos en la ecuación veinticuatro, se sustituye $\log n!$ por sus términos principales y se multiplica por $\log_{10} e$ para pasar a base diez.
- 2. a)** Cada B es la anterior por $n(n-1)/(4\pi^2)$, corregida por factores que valen casi exactamente 1 en cuanto n es moderadamente grande.
- 3. a)** Se multiplica la B anterior por $n(n-1)/(4\pi^2)$ para saber entre qué dos números enteros está la siguiente, y luego se añade la parte fraccionaria de la afirmación veinte.

Ejemplos resueltos

El tamaño de B₂₀ con el resultado treinta y tres Use el resultado treinta y tres con $n = 20$, incluida la corrección $0,0362/n$, para estimar B₂₀.

$$(n + 1/2) \log_{10} n = 20,5 \times 1,30103 = 26,67112.$$

Reste $1,2324743503 \times 20 = 24,64949$ y sume $0,70012$: el resultado es $2,72175$.

Suma la corrección $0,0362/20 = 0,00181$ para obtener $2,72356$.

$10^{2,72356}$ es aproximadamente $529,1$.

Respuesta: Unos 529,1, que coincide con $B_{20} = 174611/330$

Ejercicios

1. Use el cociente $17 \times 18/(4\pi^2)$ y $B_{16} = 3617/510$, unos 7,0922, para hallar entre qué números enteros está B_{18} .

Pista: $4\pi^2$ vale unos 39,478.

Respuesta: $306/39,478$ vale unos 7,751, y $7,751 \times 7,0922$ son unos 54,97, así que B_{18} está entre 54 y 55.

2. ¿Cuántas cifras tiene 2^{100} , usando $\log_{10} 2 = 0,30103$?

Pista: Multiplique por 100 y mire la parte entera.

Respuesta: $100 \times 0,30103 = 30,103$, así que 2^{100} tiene 31 cifras.

Un gigante descrito, y cribas de cinco vías

B_{444} tiene más de seiscientas cifras, demasiadas para escribirlas a mano en 1911. Aun así, Ramanujan lo describe con detalle, usando solo las herramientas de las secciones anteriores. Hoy un sistema de álgebra computacional lo imprime en un segundo, así que podemos comprobar cada una de sus afirmaciones.

$$B_{444} = \frac{N}{D}$$

$$(p-1) \mid 444 : \quad 2, 3, 5, 7, 13, 149, 223$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 149 \cdot 223 = 90709710$$

$$\text{fraction} = \frac{23975417}{90709710}$$

$$37 \mid N$$

$$\log_{10} B_{444} \approx 630.2433$$

ENTERA: 631 CIFRAS, 1751...

$$\log_{10} N \approx 630.2433 + 7.9577 = 638.2010$$

N: 639 CIFRAS, 1588...

B_{444} : tamaño y fracción

Escribamos $B_{444} = N/D$. Los factores primos de D salen de la regla del denominador: los primos que son uno más que un divisor de 444,

que son 2, 3, 5, 7, 13, 149 y 223. La afirmación veinte da entonces la parte fraccionaria $23975417/90709710$, y, en efecto, $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 \times 149 \times 223 = 90709710$. La afirmación dieciocho dice que 37, un primo que divide a 444 pero falta en D, divide a N.

El resultado treinta y tres da $\log_{10} B_{444} \approx 630,2433$. En palabras: la parte entera tiene 631 cifras, y como $10^{0,2433} \approx 1,751$, empieza por 1751. Sumar $\log_{10} D = \log_{10} 90709710 \approx 7,9577$ da $\log_{10} N \approx 638,2010$: el numerador tiene 639 cifras y empieza por 1588.

Luego, las últimas cifras. La afirmación veintidós dice que el numerador de $B_{444} - 1/30$ es divisible por 20, porque 444 es múltiplo de 4. Escribamos $[B_{444}]$ para la parte entera de B_{444} ; entonces $[B_{444}] + 23975417/90709710 - 1/30 = [B_{444}] + 698392/3023657$. Su numerador $3023657 \times [B_{444}] + 698392$ debe terminar en 0 con una cifra de las decenas par, lo que obliga a que la parte entera termine en 4 con una cifra par delante; de ahí, N termina en 57 con una antepenúltima cifra par. Un cálculo moderno lo confirma todo: la parte entera termina en 44, y N termina en 657. El único ingrediente inseguro es la afirmación de que $N/37$ es primo, que descansa en la afirmación catorce, no demostrada.

ÚLTIMAS CIFRAS

$$20 \mid \text{top of } (B_{444} - \frac{1}{30})$$

$$[B_{444}] + \frac{23975417}{90709710} - \frac{1}{30} = [B_{444}] + \frac{698392}{3023657}$$

$$3023657k + 698392 \equiv 0 \pmod{20}$$

k ends ... $e4$

N ends ... $e57$

✓ **ORDENADOR: ...44, ...657**

$$\frac{N}{37} \text{ prime? (rests on 14)}$$

$$7k + 2 \text{ ends in } 0$$

$$\Rightarrow 7k \text{ ends in } 8 \Rightarrow k \text{ ends in } 4$$

Las últimas cifras

Pruébalo

Compruebe en papel la aritmética del último paso: ¿cuál debe ser la última cifra de k para que $3023657 \times k + 698392$ sea divisible por veinte? La última cifra del producto es la última cifra de $7k$; sumándole 2 debe terminar en 0, así que $7k$ termina en 8 y k termina en 4.

La sección dieciséis señala que la tangente y la cosecante pueden sustituir a la cotangente. Un resultado es la ecuación treinta y seis: $(4/3)B_n(2^n - 1) = c_6B_{n-6}(2^{n-6} - 1) - c_{12}B_{n-12}(2^{n-12} - 1) + \dots$, más un último término $1/3n$ o $1/6n$ con un signo. Para n igual a 6: $(4/3) \times$

$(1/42) \times 63 = 2$, y el último término es $1/3 \times 6 = 2$. La ecuación treinta y siete hace lo mismo con factores $1 - 1/2^{n-4}$ y potencias de 3; para n igual a 5, ambos miembros valen $5/6$.

COT

TG

COSEC

$$\frac{4}{3}B_n(2^n - 1) = c_6B_{n-6}(2^{n-6} - 1) - c_{12}B_{n-12}(2^{n-12} - 1) + \dots$$

$$+ \frac{1}{3}n \text{ or } \frac{1}{6}n (\pm)$$

$$n = 6 : \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{42} \cdot 63 = 2 = \frac{1}{3} \cdot 6 \quad \checkmark$$

$$(37) : 1 - \frac{1}{2^{n-4}}, 3^k$$

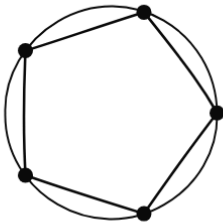
$$n = 5 : \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \quad \checkmark$$

$$1, 2, 3\text{-interval} \rightarrow \omega^p = 1 \text{ (or } i) \rightarrow p\text{-interval}$$

Tangente, cosecante, intervalos

La sección diecisiete da nombre a la familia: las ecuaciones de las secciones uno, tres y cuatro son las fórmulas de uno, dos y tres intervalos, y tomando las raíces p -ésimas de la unidad, o de i cuando p es par, se obtienen fórmulas de p intervalos. Desarrolla el caso p igual a 5 con las raíces quintas $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$. Sumar sus senos da $\varphi(x) = 5(x^5/5! - x^{15}/15! + \dots)$: todo se cancela salvo una potencia de cada diez, la versión de cinco vías del balancín. La razón áurea entra a través de $\alpha_n = ((1 + \sqrt{5})/2)^n + ((1 - \sqrt{5})/2)^n$, que son números enteros: 1, 3, 4, 7, 11, etcétera. La ecuación treinta y ocho, $5(Bo +$

$B_{10}x^{10}/10! + B_{20}x^{20}/20! + \dots) = -x ((x^4/4!)(1 + \alpha_5) - \dots) / ((x^5/5!)(1 + \alpha_5) - \dots)$, conserva una B de cada diez; su término principal es $-x(x^4/24)/(x^5/120) = -5$, que coincide con $5B_0$. Las ecuaciones treinta y nueve a cuarenta y dos dan las otras cuatro hebras, y una identidad semejante con cosenos y la función ψ da todavía más.



$$\varphi(x) = 5\left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^{15}}{15!} + \dots\right)$$

1 POTENCIA DE 10

$$\alpha_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$1, 3, 4, 7, 11, \dots$$



$$-x \cdot \frac{x^4/24}{x^5/120} = -5 = 5B_0 \quad \checkmark$$

CUATRO HEBRAS MÁS, Y COSENOS

La criba de cinco vías

Para recordar

Para B_{444} , Ramanujan halla la parte fraccionaria, el número de cifras y las primeras cifras de su parte entera y de su numerador, y sus últimas cifras, todo ello confirmado hoy; solo la afirmación del cociente primo descansa en una afirmación no demostrada. La tangente y la cosecante dan más relaciones del mismo tipo, comprobadas para n pequeño. Las raíces p -ésimas de la unidad dan fórmulas de p intervalos; para p igual a 5 aparecen los números enteros de la razón áurea y cada hebra conserva un número de Bernoulli de cada diez.

Preguntas

1. ¿Cómo halla Ramanujan el denominador D de B_{444} ?
 - a. Con la regla del denominador: multiplicando los primos que son uno más que un divisor de 444
 - b. Calculando B_{444} completo
 - c. Con la ecuación doce
 - d. Con la fórmula de las cifras
2. ¿Por qué la parte entera de B_{444} tiene 631 cifras?
 - a. Porque $\log_{10} B_{444}$ vale unos 630,2433
 - b. Porque 444 tiene 3 cifras
 - c. Porque D tiene 8 cifras
 - d. Porque el numerador es divisible por 37

3. ¿Qué ingrediente de la descripción de B_{444} es inseguro?
- a. La afirmación de que $N/37$ es primo, que descansa en la afirmación catorce, no demostrada
 - b. El número de cifras
 - c. La parte fraccionaria
 - d. Las últimas cifras

Respuestas

1. a) Los factores primos de D salen de la regla del denominador: los primos que son uno más que un divisor de 444, que son 2, 3, 5, 7, 13, 149 y 223.
2. a) El resultado treinta y tres da $\log_{10} B_{444} \approx 630,2433$, así que la parte entera tiene 631 cifras.
3. a) El único ingrediente inseguro es la afirmación de que $N/37$ es primo, que descansa en la afirmación catorce, no demostrada.

Ejemplos resueltos

Las cifras del numerador de B_{444} Sabiendo que $\log_{10} B_{444} \approx 630,2433$ y $D = 90709710$, halle el número de cifras y las primeras cifras del numerador N .

$$\log_{10} N = \log_{10} B_{444} + \log_{10} D.$$

$\log_{10} 90709710$ vale unos 7,9577.

$$\text{Así que } \log_{10} N \approx 630,2433 + 7,9577 = 638,2010.$$

La parte entera 638 significa 639 cifras, y $10^{0,2010} \approx 1,588$ da las primeras cifras 1588.

Respuesta: 639 cifras, empezando por 1588

Ejercicios

1. Enumere los divisores de 444, sume uno a cada uno y quédese con los primos. ¿Cuál es su producto?

Pista: $444 = 4 \times 3 \times 37$; sus divisores son 1, 2, 3, 4, 6, 12, 37, 74, 111, 148, 222, 444.

Respuesta: Sumando uno se obtiene 2, 3, 4, 5, 7, 13, 38, 75, 112, 149, 223, 445; los primos son 2, 3, 5, 7, 13, 149, 223, y su producto es 90709710.

2. Compruebe la ecuación treinta y seis para $n = 6$ con $B_6 = 1/42$.

Pista: El primer miembro es $(4/3)B_6(2^6 - 1)$; el segundo miembro se reduce al último término, un tercio de seis.

Respuesta: $(4/3) \times (1/42) \times 63 = 2$, y un tercio de 6 es 2, así que ambos miembros coinciden.

Cribas de cuatro vías, y el veredicto de los editores

La criba de cinco vías de la parte anterior usaba la razón áurea; la criba de cuatro vías usa a su prima, la raíz cuadrada de dos.

Ramanujan la plantea con dos sucesiones, $a_n = (1 + 1/\sqrt{2})^n + (1 - 1/\sqrt{2})^n$ y $b_n = (1 + 1/\sqrt{2})^n - (1 - 1/\sqrt{2})^n$. En palabras: se suman o se restan las potencias n -ésimas de dos números cuyas partes irracionales se cancelan o se duplican. Para n igual a 2: $(1 + 1/\sqrt{2})^2 + (1 - 1/\sqrt{2})^2 = 2 \times (1 + 1/2) = 3$, porque los términos cruzados $\pm\sqrt{2}$ se cancelan; así que $a_2 = 3$. Cumplen reglas como $a_{m+n} = a_m a_n - a_{m-n}/2^n$, que permiten construir cada una a partir de las anteriores.

$$1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

SE CANCELAN O DUPLICAN

$$(1 + \sqrt{2} + \frac{1}{2}) + (1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}) = 3 = a_2$$

$$a_{m+n} = a_m a_n - a_{m-n} / 2^n$$

(43)–(46): strands spaced 8

$$4\left(B_0 + \frac{B_8 x^8}{8!} + \cdots\right) = -x \frac{\frac{x^3}{3!} a_2 - \frac{x^{11}}{11!} a_6 + \cdots}{\frac{x^4}{4!} a_2 - \frac{x^{12}}{12!} a_6 + \cdots}$$

$$-x \cdot \frac{x^3/6}{x^4/24} = -4 = 4B_0 \quad \checkmark$$

Ayudantes con raíz de dos

Con ellas escribe cuatro fórmulas, las ecuaciones cuarenta y tres a cuarenta y seis, una para cada hebra de números de Bernoulli separados de ocho en ocho. La primera es $4(B_0 + B_8 x^8/8! + B_{16} x^{16}/16! + \cdots) = -x ((x^3/3!)a_2 - (x^{11}/11!)a_6 + \cdots) / ((x^4/4!)a_2 - (x^{12}/12!)a_6 + \cdots)$. Compruebe su término principal: $-x (x^3/6)/(x^4/24) = -4$, y el primer miembro empieza por $4B_0 = -4$, como debe ser. Las otras conservan B_2, B_{10}, B_{18} ; luego B_4, B_{12}, B_{20} , con un factor $4\sqrt{2}$; luego B_6, B_{14}, B_{22} . Así se cierra el artículo: una sola idea, raíces de la unidad que cancelan términos, que da cribas de todos los tamaños.

$$B_0, B_8, B_{16}, \dots$$

$$B_2, B_{10}, B_{18}, \dots$$

$$B_4, B_{12}, B_{20}, \dots \quad (4\sqrt{2})$$

$$B_6, B_{14}, B_{22}, \dots$$

CRIBAS DE TODOS LOS TAMAÑOS

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = 2\left(1 + \frac{3}{2}\right) = 5$$

$$\checkmark \sqrt{2} \text{ terms cancel} \Rightarrow a_3 = 5$$

Cuatro hebras, un paso más

Pruébelo

Compruebe usted mismo la sucesión un paso más: $a_3 = (1 + 1/\sqrt{2})^3 + (1 - 1/\sqrt{2})^3 = 2(1 + 3/2) = 5$. Los términos con $\sqrt{2}$ vuelven a cancelarse, como ocurría con a_2 , así que a_3 también es un número entero.

El libro añade luego una nota de los editores de los artículos reunidos, y merece leerse con atención, porque clasifica todo lo que hemos visto según su situación. Primero, pequeñas aclaraciones: Ramanujan escribe B_{2n} donde la mayoría de los libros escriben B_n , y c_k es el coeficiente binomial $n!/(k!(n-k)!)$. La ecuación doce vale para n

impar mayor que 1, con tres formas del último término según el resto de dividir n entre 6.

EDITORES

$B_{2n} \leftrightarrow B_n$

$c_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

(12): odd $n > 1$

after (27), (29): invalid

×

20: VON STAUDT–CLAUSEN, 16: EULER

ESBOZO DE PRUEBACOROLARIO

CONJETURA

16, 20, 21

17, 18

14, 15, 19

rest on (28), (30), (32)

NUNCA
DEMOSTRADO

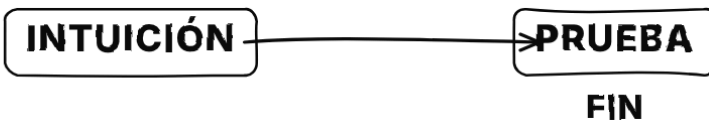
Los editores clasifican

Luego, el fondo. Las deducciones que siguen a las ecuaciones veintisiete y veintinueve no son válidas tal como están, porque la serie dentro de la integral diverge cuando x llega a n. Los resultados principales del artículo ya se conocían: la afirmación veinte es el teorema de von Staudt y Clausen, y la afirmación dieciséis, que se deduce de él, ya la conocía Euler. De las ocho afirmaciones aritméticas, de la catorce a la veintiuno, se indican demostraciones para la dieciséis, la veinte y la veintiuno, pero dependen de la ecuación veintiocho y de las afirmaciones análogas para las series treinta y treinta y dos, que nunca se demuestran. La diecisiete y la

dieciocho se presentan como corolarios, y la catorce, la quince y la diecinueve como meras conjeturas.

Así que el artículo es, en palabras de los editores, interesante como muestra de la primera manera de Ramanujan: métodos rápidos, un teorema famoso redescubierto y patrones atrevidos leídos en una tabla, con las demostraciones todavía por llegar. Este curso lo ha seguido desde la cotangente hasta ese veredicto, y termina aquí.

**MÉTODOS RÁPIDOS
REDESCUBIERTO
PATRONES AUDACES**



**HEBRAS DE 8 EN 8, DE $1 \pm 1/\sqrt{2}$
CONOCIDOS; PASOS SIN PROBAR
CÁLCULO ANTES DEL RIGOR**

La primera manera

Para recordar

Las fórmulas de cuatro intervalos usan sucesiones construidas con uno más o menos uno entre raíz de dos, y cada una aísla una hebra de números de Bernoulli separados de ocho en ocho; sus términos principales se comprueban con B_0 y B_2 . La nota de los editores aclara la notación y dice en qué situación está cada cosa: algunas deducciones no son válidas tal como están escritas, los resultados principales ya los conocían von Staudt, Clausen y Euler, las demostraciones indicadas descansan en afirmaciones no demostradas sobre series, y tres afirmaciones son conjeturas, una de ellas falsa. Leído junto con esa nota, el artículo muestra la primera manera de Ramanujan: cálculo poderoso e intuición, antes de la demostración rigurosa.

Preguntas

1. ¿Qué aíslan las fórmulas de cuatro intervalos?
 - a. Hebras de números de Bernoulli separados de ocho en ocho, como B_0 , B_8 , B_{16}
 - b. Uno de cada dos números de Bernoulli
 - c. Solo B_2
 - d. Los números de Bernoulli de índice impar
2. ¿Por qué dicen los editores que las deducciones que siguen a las ecuaciones veintisiete y veintinueve no son válidas tal como están?

- a. Porque la serie dentro de la integral diverge cuando x llega a n
 - b. Porque usan un valor equivocado de π
 - c. Porque las integrales valen cero
 - d. Porque las B son negativas
3. ¿Qué afirmaciones dicen los editores que se enunciaron meramente como conjeturas?
- a. La catorce, la quince y la diecinueve
 - b. La dieciséis, la veinte y la veintiuno
 - c. La diecisiete y la dieciocho
 - d. La veintidós y la veintitrés

Respuestas

1. **a)** Las ecuaciones cuarenta y tres a cuarenta y seis dan una fórmula para cada hebra de números de Bernoulli separados de ocho en ocho.
2. **a)** Las deducciones no son válidas tal como están, porque la serie dentro de la integral diverge cuando x llega a n .
3. **a)** La diecisiete y la dieciocho se presentan como corolarios, y la catorce, la quince y la diecinueve como meras conjeturas.

Ejemplos resueltos

La sucesión a_n para n pequeño Calcule a_2 y a_3 , donde $a_n = (1 + 1/\sqrt{2})^n + (1 - 1/\sqrt{2})^n$.

Para $n = 2$, $(1 \pm 1/\sqrt{2})^2 = 1 \pm \sqrt{2} + 1/2$, y al sumar los dos se cancela $\pm\sqrt{2}$.

Así que $a_2 = 2 \times (1 + 1/2) = 3$.

Para $n = 3$, $(1 \pm 1/\sqrt{2})^3 = 1 \pm 3/\sqrt{2} + 3/2 \pm 1/(2\sqrt{2})$, y al sumar se cancelan los términos con $\sqrt{2}$.

Así que $a_3 = 2 \times (1 + 3/2) = 5$.

Respuesta: $a_2 = 3$ y $a_3 = 5$

Ejercicios

1. Compruebe el término principal de la ecuación cuarenta y tres: ¿a qué es igual $-x (x^3/3!)a_2 / ((x^4/4!)a_2)$ para x pequeño?

Pista: Los factores a_2 se cancelan.

Respuesta: $-x (x^3/6)/(x^4/24) = -4$, que coincide con $4B_0 = -4$.

2. Según los editores, ¿de qué dependen las demostraciones indicadas de las afirmaciones dieciséis, veinte y veintiuno?

Pista: Piense en las series de la sección doce.

Respuesta: De la ecuación veintiocho y de las afirmaciones correspondientes sobre las series treinta y treinta y dos, que nunca se demuestran.