

Artículos completos de Srinivasa Ramanujan



Srinivasa Ramanujan · 1927

Audiolecciones ilustradas

Lecturized

Artículos completos de Srinivasa Ramanujan

Audiolecciones ilustradas

Srinivasa Ramanujan · 1927

Contado como lecciones ilustradas por Lecturized
lecturized.com

Del original: Collected Papers of Srinivasa Ramanujan, ed. G. H. Hardy, P. V. Seshu
Aiyar and B. M. Wilson (Cambridge, 1927)

Índice

Una familia de fracciones en la cotangente

Pasos de seis

Veinte fracciones y sus patrones

Una receta para los denominadores

Cómo fijar un número a partir de su tamaño

Un camino hacia la demostración, con un hueco

Describir un gigante sin escribirlo

Otros puntos de partida, y cribas de cinco vías

La criba de cuatro vías y el veredicto final

Una familia de fracciones en la cotangente

Ponga una calculadora en radianes, teclee una décima, calcule su tangente y divida una décima entre el resultado. Obtendrá un número apenas por debajo de uno: cero coma nueve nueve seis seis seis cuatro cuatro. Ahora pruebe otro camino: empiece por uno, réstele una centésima dividida entre tres y réstele una diezmilésima dividida entre cuarenta y cinco. Salen las mismas cifras. Esos divisores, tres y cuarenta y cinco, no son casualidad; están hechos de una familia de fracciones llamadas números de Bernoulli, y el primer artículo que Ramanujan publicó, en 1911, trata de ellas.

CALCULADORA

0.9966644

$$1 - \frac{0.01}{3} - \frac{0.0001}{45}$$

$$= \mathbf{0.9966644}$$

$$x \cot x = 1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{(2x)^2}{2!} - \frac{1}{30} \cdot \frac{(2x)^4}{4!} - \dots$$

$$\text{zeroth} = -1$$

$$\text{first} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{x^2}{3}$$

$$\text{second} = \frac{1}{30} \Rightarrow \frac{x^4}{45}$$

$$x = 0.1 : \quad \frac{x^2}{3} = \frac{0.01}{3}, \quad \frac{x^4}{45} = \frac{0.0001}{45}$$

Dos caminos, las mismas cifras

Ramanujan empieza con una función de la trigonometría escolar: x multiplicado por la cotangente de x , donde la cotangente es el coseno dividido entre el seno. Cerca de cero, esta función puede escribirse como uno, menos un pequeño múltiplo de x al cuadrado, menos un múltiplo menor de x a la cuarta, y así con todas las potencias pares. Acuerda escribir cada uno de esos múltiplos con un número especial: el primer número de Bernoulli, el segundo, el tercero, y así sucesivamente, cada uno dividido entre un factorial y multiplicado por una potencia de dos x . En su manera de contar todos son positivos, y para que el término constante, uno, encaje en el mismo patrón, declara que el número de Bernoulli cero vale menos uno. Si el primero vale un sexto, el primer múltiplo es un sexto, dividido entre dos, por cuatro, es decir, un tercio; si el segundo vale un treintavo, el

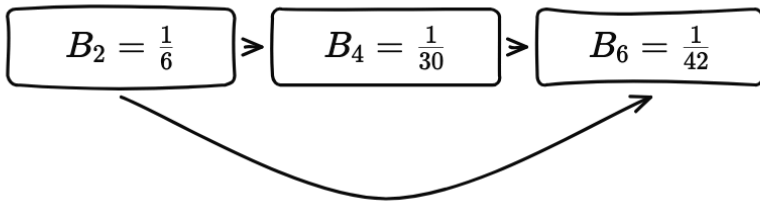
siguiente es un cuarenta y cincoavo. Esa es exactamente la receta de la calculadora: la serie de la cotangente lleva estas fracciones dentro.

¿Cómo se sacan esas fracciones? Ramanujan escribe la cotangente de tres maneras distintas: como coseno entre seno; como el seno del ángulo doble entre uno menos el coseno del ángulo doble; y como uno más ese coseno entre el mismo seno. Cada numerador y cada denominador es una serie de potencias conocida. Multiplique ambos miembros de una de esas ecuaciones por el denominador y tendrá dos series que deben ser iguales; dos series son iguales solo cuando cada potencia de x tiene el mismo coeficiente en ambos miembros. Así, igualar, por ejemplo, los coeficientes de x a la sexta produce una ecuación que liga los números de Bernoulli, con números de contar, los coeficientes binomiales, delante de ellos. Obtiene tres familias de ecuaciones así: una para potencias impares, con potencias de dos adicionales; otra para potencias pares; y otra para potencias impares mayores que uno.

$$(x \cot x)^2 = -x^2 \left(1 + \frac{d \cot x}{dx} \right)$$

$$\frac{5}{2} B_4 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^2 = \frac{1}{12}$$

$$\frac{d \tan x}{dx} = 1 + \tan^2 x$$



ANTERIORES

Igualar potencias, una B cada vez

Veamos la familia par en acción. Igualar la cuarta potencia da: seis veces el primer número de Bernoulli, más uno, menos dos, igual a cero; así que el primero vale un sexto. Igualar la sexta potencia da: quince veces el segundo, menos quince sextos, menos uno, más tres, igual a cero; así que el segundo vale un treintavo. Igualar la octava potencia da un cuarentaidosavo para el tercero. Cada paso funciona, pero cada paso necesita además todos los números de Bernoulli anteriores, unos términos en cantidad de la mitad del índice, y Ramanujan dice sin rodeos que esto se vuelve tedioso.

Su primera mejora eleva la serie al cuadrado. Hay una identidad exacta: $x \cot x$, al cuadrado, es igual a menos x al cuadrado por uno más la derivada de la cotangente. Como ambos miembros

pueden escribirse con números de Bernoulli, igualar coeficientes da ahora una relación hecha de productos de dos números de Bernoulli, con el buscado multiplicado por la mitad de su índice más uno. Para la cuarta potencia: cinco medios del segundo número de Bernoulli es igual a un medio, por seis, por un sexto al cuadrado, es decir, un doceavo; de nuevo el segundo vale un treintavo. Una relación parecida sale de que la derivada de la tangente es uno más la tangente al cuadrado.

Su segunda mejora mezcla la cotangente ordinaria con su gemela hiperbólica, que es la misma función evaluada en un argumento imaginario. Al sumarlas se cancela un término de cada dos, de modo que solo sobreviven el número de Bernoulli cero, el segundo, el cuarto, y así sucesivamente, uno de cada dos; al restarlas quedan los demás. Con el teorema de De Moivre para las potencias de números complejos, cada una de estas medias familias vuelve a ser un cociente de dos series sencillas, e igualar coeficientes da ecuaciones que se saltan un número de Bernoulli de cada dos. En lugar de la mitad de los números anteriores, cada nuevo necesita ahora solo términos en cantidad de un cuarto del índice, por ejemplo cinco en vez de diez cuando el índice es veinte. Resultados parecidos salen de la tangente combinada con la tangente hiperbólica.

COT B_0 B_2 B_4 B_6 B_8 B_{10}

COTH $+$ $-$ $+$ $-$ $+$ $-$

SUMA

ANTES

AHORA

La gemela cancela un término de cada dos

Para recordar

Los números de Bernoulli de Ramanujan son las fracciones positivas de la serie de x por la cotangente de x , con el número cero fijado en menos uno. Escribir la cotangente como cociente de dos series e igualar cada potencia de x da ecuaciones que los producen uno a uno: un sexto, un treintavo, un cuarentaidosavo. Esas ecuaciones simples necesitan, cada una, todos los números anteriores, lo que se vuelve lento. Elevar la serie al cuadrado, o mezclar la cotangente con su gemela hiperbólica, da relaciones que usan solo la mitad de los números anteriores.

Preguntas

1. ¿Por qué declara Ramanujan que el número de Bernoulli cero vale menos uno?
 - a. Porque todos sus números de Bernoulli son negativos
 - b. Para que el término constante, uno, de la serie encaje en el mismo patrón que los demás términos
 - c. Porque la cotangente de cero vale menos uno
 - d. Para que las ecuaciones tengan menos términos
2. ¿Por qué igualar los coeficientes de dos series da una ecuación?
 - a. Porque dos series solo pueden ser iguales cuando cada potencia de x tiene el mismo coeficiente en ambos miembros
 - b. Porque los coeficientes son siempre números enteros
 - c. Porque toda serie es igual a la cotangente
 - d. Porque las series del seno y del coseno son idénticas
3. ¿Cuál es el inconveniente de las ecuaciones simples que salen de las tres maneras de escribir la cotangente?
 - a. Dan valores erróneos a partir del tercer número
 - b. Cada paso necesita todos los números de Bernoulli anteriores, así que el trabajo crece
 - c. Solo funcionan para potencias impares
 - d. Necesitan una calculadora
4. ¿Qué se consigue mezclando la cotangente con su gemela hiperbólica?
 - a. Se duplica cada término

- b. Se cancela un término de cada dos, de modo que cada mitad de la familia puede hallarse con menos números anteriores
- c. Ya no hacen falta los números de Bernoulli
- d. La serie se vuelve finita

Respuestas

1. **b)** En su manera de contar todos son positivos, y para que el término constante, uno, encaje en el mismo patrón declara que el número cero vale menos uno.
2. **a)** Tras multiplicar por el denominador se tienen dos series que deben ser iguales, y lo son solo cuando cada potencia de x tiene el mismo coeficiente.
3. **b)** Cada paso funciona, pero cada paso necesita además todos los números de Bernoulli anteriores, y Ramanujan dice que esto se vuelve tedioso.
4. **b)** Al sumar las dos se cancela un término de cada dos, y las ecuaciones resultantes necesitan términos en cantidad de un cuarto del índice en lugar de la mitad.

Ejemplos resueltos

Los dos primeros números de Bernoulli igualando potencias Con la familia par de ecuaciones y el número cero igual a menos uno, halle el primer y el segundo número de Bernoulli.

Igualar la cuarta potencia da seis veces el primer número, menos el número cero, menos dos, igual a cero.

Con el número cero igual a menos uno, esto es seis veces el primero, más uno, menos dos, igual a cero, así que el primero vale un sexto.

Igualar la sexta potencia da quince veces el segundo, menos quince veces el primero, más el número cero, más tres, igual a cero.

Es decir, quince veces el segundo, menos quince sextos, menos uno, más tres, igual a cero, así que quince veces el segundo es un medio.

Respuesta: El primero vale un sexto y el segundo, un treintavo.

Ejercicios

1. Compruebe la receta de la calculadora: si el primer número de Bernoulli vale un sexto, ¿qué múltiplo de x al cuadrado aparece en la serie de x por la cotangente de x ?

Pista: El múltiplo es el número dividido entre dos factorial, por dos al cuadrado.

Respuesta: Un tercio: un sexto dividido entre dos, por cuatro, son cuatro doceavos, es decir, un tercio, y se resta.

2. Use la relación de la serie al cuadrado para la cuarta potencia y recupere el segundo número de Bernoulli a partir del primero, un sexto.

Pista: Cinco medios del segundo número es igual a un medio, por seis, por el primer número al cuadrado.

Respuesta: Un treintavo: un medio por seis por un treintaseisavo es un doceavo, y un doceavo dividido entre cinco medios es un treintavo.

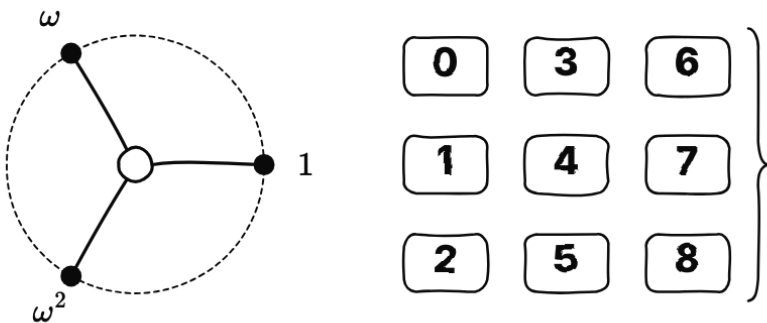
3. Cuando el índice es veinte, ¿cuántos términos anteriores usa la ecuación par simple y cuántos usa el atajo hiperbólico?

Pista: Las ecuaciones simples usan términos en cantidad de la mitad del índice; el atajo, de un cuarto.

Respuesta: Unos diez la ecuación simple y unos cinco el atajo, así que el atajo necesita solo la mitad de números anteriores.

Pasos de seis

Imagine a tres amigos que tiran de un aro con cuerdas colocadas a ángulos iguales, separadas un tercio de vuelta. Si tiran con la misma fuerza, el aro no se mueve: los tres tirones se anulan exactamente. El siguiente atajo de Ramanujan usa tres números dispuestos como esas tres cuerdas, y esa anulación es lo que le ahorra trabajo.



$$3 \times (-1) = -3$$

$$\text{first} = \frac{1}{6}$$

Tres cuerdas, tres hebras

Los números son las tres raíces cúbicas de uno: el propio uno y dos números complejos, que suelen llamarse omega y omega al cuadrado, cada uno a un tercio de vuelta de los otros en el círculo. Cada uno de

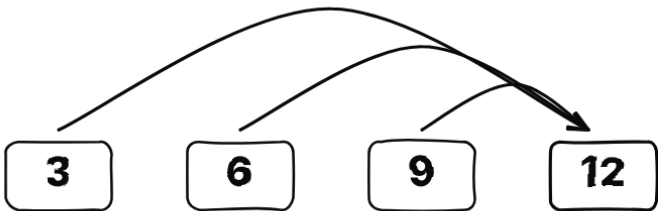
ellos, multiplicado por sí mismo tres veces, da uno, y los tres suman cero, como las tres cuerdas. En la parte anterior, mezclar la cotangente con su gemela hiperbólica hacía que se cancelara un número de Bernoulli de cada dos; darle a la cotangente las tres raíces cúbicas hace que se cancelen dos términos de cada tres.

Empieza con una identidad sobre senos: cuatro veces el seno de x , por el seno de x omega, por el seno de x omega al cuadrado, es igual a menos la suma de los senos del doble de esos tres ángulos. Tomar logaritmos y derivar convierte ese producto en una suma de tres cotangentes, cada una ponderada por su raíz cúbica. Tomando la mitad del ángulo y siguiendo los mismos pasos que antes, obtiene tres ecuaciones nuevas, cada una de las cuales dice que una serie corta de números de Bernoulli es igual a un cociente de dos series sencillas. La primera conserva solo los números de Bernoulli cero, tercero, sexto, uno de cada tres. La segunda conserva el primero, el cuarto, el séptimo; la tercera, el segundo, el quinto, el octavo. Así, toda la familia queda dividida en tres hebras entrelazadas, separadas tres lugares, y cada hebra puede tratarse por separado.

Puede comprobar directamente los primeros términos. En la primera ecuación, para x muy pequeño, el segundo miembro es menos x , por x al cuadrado entre dos, dividido entre x al cubo entre seis, es decir, menos tres; el primer miembro empieza por tres veces el número de Bernoulli cero, y tres por menos uno es menos tres. En la segunda, el segundo miembro empieza por x al cuadrado entre cuatro, y el primero, por tres veces el primer número de Bernoulli, dividido entre dos, por x al cuadrado; eso vuelve a dar un sexto.

Igualar coeficientes en las tres ecuaciones da su duodécimo resultado: una suma alternada corta de números de Bernoulli, separados seis

lugares, con números de contar delante, cerrada por un último término que es un sexto o un tercio del índice. Para el índice cinco es todo lo corta que puede ser: diez veces el primer número de Bernoulli es igual a cinco tercios, así que el primero vale un sexto. En general, cada número nuevo necesita ahora solo un tercio de los términos que necesitaba el método simple: el duodécimo sale solo del noveno, del sexto y del tercero.



UN TERCIO DEL TRABAJO

$$10 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{1}{3}(n + 2) B_n = \sum \text{pairs}$$

$$\frac{10}{3} B_8 = 28 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{42} = \frac{1}{9}$$

De seis en seis

Luego llega un segundo regalo: una manera de comprobar el trabajo. Dividiendo la segunda ecuación entre x y derivando, y usando juntas la primera y la segunda ecuación, halla una relación en la que la serie de la segunda hebra, con multiplicadores extra, es igual a x al cuadrado más nueve veces el producto de las dos primeras series.

Igualar coeficientes da su decimotercer resultado: un tercio del índice más dos, por un número de Bernoulli, es igual a una suma de productos de parejas, de nuevo separadas seis lugares. Pruébalo con el índice ocho: un tercio de diez, por el cuarto número de Bernoulli, debe ser igual a veintiocho por un sexto por un cuarentaidosavo, que es un noveno; así que el cuarto es un noveno por tres décimos, un treintavo, como antes. Ramanujan dice sin rodeos para qué sirve cada uno: el duodécimo resultado calcula los números muy deprisa, y el decimotercero sirve para comprobar los cálculos, igual que un contable suma una columna dos veces por caminos distintos.

Para recordar

Las tres raíces cúbicas de uno suman cero, y dárseles a la cotangente hace que se cancelen dos de cada tres términos de Bernoulli. Eso divide los números de Bernoulli en tres hebras, separadas seis lugares, cada una dada por un cociente de series sencillas cuyos primeros términos comprueban al instante los valores conocidos. Igualar coeficientes da una recurrencia rápida que necesita solo un tercio de los términos anteriores del método simple, y una relación de productos que sirve como comprobación independiente.

Preguntas

1. ¿Por qué las tres raíces cúbicas de uno hacen que se cancelen dos de cada tres términos?

- a. Porque suman cero, como tres tirones iguales sobre un aro
 - b. Porque cada una de ellas vale uno
 - c. Porque son todas negativas
 - d. Porque anulan la cotangente
2. ¿Para qué sirve el duodécimo resultado y para qué el decimotercero?
- a. El duodécimo comprueba el trabajo y el decimotercero calcula los números
 - b. El duodécimo calcula los números muy deprisa y el decimotercero sirve para comprobar
 - c. Ambos demuestran que los números son fracciones
 - d. Ambos dan los denominadores
3. Comparada con el método simple, ¿cuántos términos anteriores necesita la nueva recurrencia?
- a. Los mismos
 - b. Solo un tercio de ellos
 - c. El doble
 - d. Ninguno

Respuestas

- 1. a)** Cada una, multiplicada por sí misma tres veces, da uno, y las tres suman cero, así que la mezcla de tres cancela dos términos de cada tres.
- 2. b)** Ramanujan dice que el duodécimo resultado calcula los números muy deprisa, y que el decimotercero sirve para comprobar los cálculos.
- 3. b)** Cada número nuevo necesita ahora solo un tercio de los términos que necesitaba el método simple.

Ejemplos resueltos

Comprobación con la relación de productos Use el decimotercer resultado para el índice ocho, con el primer número de Bernoulli igual a un sexto y el tercero igual a un cuarentaidosavo, para hallar el cuarto.

Para el índice ocho aparece un solo producto: veintiocho, por el primer número, por el tercer número.

Veintiocho por un sexto por un cuarentaidosavo es veintiocho sobre doscientos cincuenta y dos, es decir, un noveno.

El primer miembro es un tercio de diez, es decir, diez tercios, por el cuarto número.

Así que el cuarto número es un noveno dividido entre diez tercios, que son tres noventavos, un treintavo.

Respuesta: El cuarto número de Bernoulli es un treintavo.

Ejercicios

1. Con la primera ecuación de las raíces cúbicas, ¿por qué el número de Bernoulli cero debe valer menos uno?

Pista: Para x muy pequeño, el segundo miembro es menos x , por x al cuadrado entre dos, dividido entre x al cubo entre seis.

Respuesta: Ese cociente vale menos tres, y el primer miembro empieza por tres veces el número cero, así que el número cero vale menos uno.

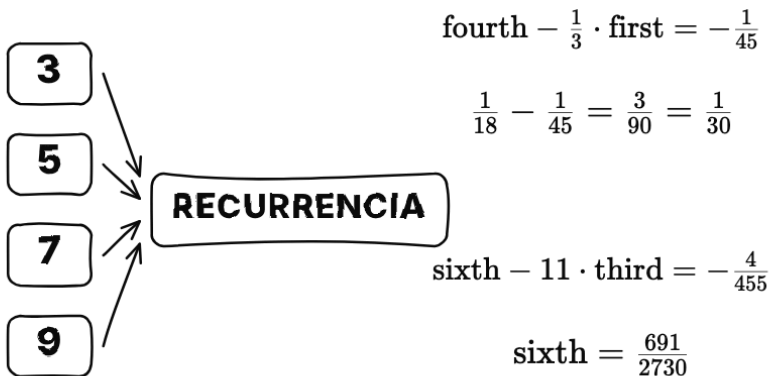
2. Con el duodécimo resultado para el índice cinco, halle el primer número de Bernoulli.

Pista: Para el índice cinco dice: diez veces el primer número es igual a cinco tercios.

Respuesta: Un sexto, porque cinco tercios divididos entre diez son un sexto.

Veinte fracciones y sus patrones

Un naturalista que quiere descubrir las leyes de la migración de las aves necesita primero muchos avistamientos anotados. Ramanujan trabaja igual: antes de enunciar ninguna ley sobre los números de Bernoulli, reúne ejemplares. Lo dice directamente: para conocer sus propiedades, conviene calcular primero unos cuantos.

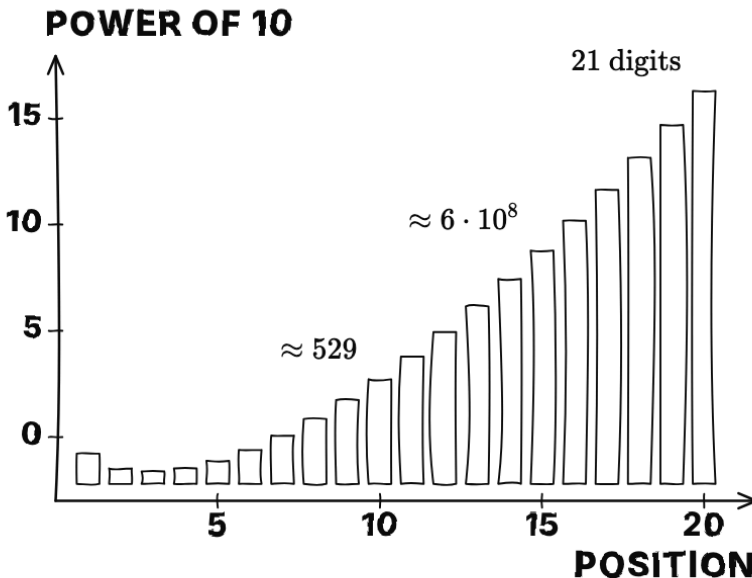


Ejemplares de la recurrencia

Su herramienta es la recurrencia rápida de la parte anterior. Le da los números impares tres, cinco, siete, nueve, etcétera, uno tras otro, y cada uno produce una ecuación corta. Por ejemplo, una de ellas dice

que el cuarto número de Bernoulli, menos un tercio del primero, es igual a menos un cuarenta y cincoavo. Como el primero vale un sexto, su tercio es un dieciochoavo, y un dieciochoavo menos un cuarenta y cincoavo son tres noventavos, es decir, un treintavo. Otra dice que el sexto, menos once veces el tercero, es igual a menos cuatro entre cuatrocientos cincuenta y cinco; con el tercero igual a un cuarentaidosavo, el sexto sale seiscientos noventa y uno entre dos mil setecientos treinta.

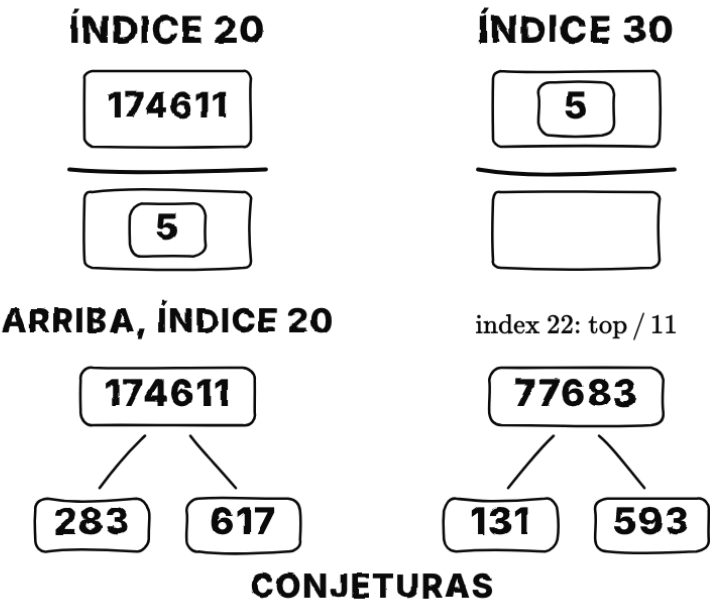
Siguiendo así, enumera veinte números de Bernoulli. Durante un tiempo siguen siendo pequeños, un sexto, un treintavo, un cuarentaidosavo, otra vez un treintavo, cinco sesentaseisavos, y luego suben deprisa. El décimo ronda los quinientos veintinueve, el decimoquinto los seiscientos millones, y el vigésimo tiene un numerador de veintiuna cifras sobre un denominador de solo trece mil quinientos treinta. Los denominadores siguen siendo modestos mientras los numeradores se disparan, y él observa que la sucesión crece sin límite.



Veinte ejemplares

Luego mira los ejemplares y enuncia lo que observa, para todo número de Bernoulli de índice par distinto de cero. Primero: después de dividir el número entre su índice y simplificar, el numerador es primo. Segundo: el denominador contiene siempre el dos y el tres, cada uno exactamente una vez. Tercero: multiplicar el número por dos elevado al índice, por uno menos que esa potencia de dos, y dividir entre el índice, da un número entero; así que el doble de uno menos que esa potencia de dos, por el número, es un entero impar. De esto saca dos consecuencias: una sobre qué potencia de dos queda en un denominador, y otra que dice que un primo que divide al índice pero falta en el denominador debe dividir al numerador, con un cociente primo.

Sus ejemplos hacen muy visible esta última idea. El once divide al índice veintidós pero no está en el denominador de ese número, ciento treinta y ocho, así que el once divide al numerador; lo mismo ocurre con el trece para el índice veintiséis, el diecisiete para el treinta y cuatro y el diecinueve para el treinta y ocho. El cinco divide tanto a veinte como a treinta; está en el denominador para el veinte pero no para el treinta, así que en el treinta aparece en el numerador. En sus palabras, un primo que aparece en el índice y no se encuentra en el denominador aparecerá en el numerador, y al revés.



seiscientos diecisiete. El cociente para el índice veintidós, setenta y siete mil seiscientos ochenta y tres, es ciento treinta y uno por quinientos noventa y tres. Los editores de los artículos reunidos señalan que las dos primeras de estas afirmaciones, y la regla de los denominadores de la sección siguiente, se enunciaron solo como conjeturas; la afirmación sobre el dos y el tres en todos los denominadores, sin embargo, es cierta.

Para recordar

Para hallar propiedades de los números de Bernoulli, Ramanujan calcula primero veinte de ellos con su recurrencia rápida, desde un sexto hasta un número con un numerador de veintiuna cifras. De esa tabla lee patrones: un numerador primo tras dividir entre el índice, el dos y el tres exactamente una vez en cada denominador, y ciertos múltiplos que son siempre enteros impares. Relaciona los primos del índice con el numerador y el denominador: un primo del índice aparece en uno de los dos. Algunos de estos patrones son teoremas ciertos, pero la afirmación del numerador primo falla, por ejemplo para el índice veinte, cuyo numerador es doscientos ochenta y tres por seiscientos diecisiete.

Preguntas

1. ¿Por qué calcula Ramanujan veinte números de Bernoulli antes de enunciar ninguna propiedad?

- a. Porque, como un naturalista, necesita ejemplares antes de buscar leyes
 - b. Porque la revista exigía una tabla
 - c. Porque las propiedades solo pueden demostrarse para veinte de ellos
 - d. Porque quería mostrar que la recurrencia falla
2. ¿Qué observa Ramanujan sobre los denominadores de los números de Bernoulli de índice par?
- a. Que siempre son primos
 - b. Que siempre contienen el dos y el tres, cada uno exactamente una vez
 - c. Que crecen tan deprisa como los numeradores
 - d. Que siempre son potencias de dos
3. ¿Qué observación falla al comprobarla, como muestra el ejemplo del índice veinte?
- a. Que el dos y el tres dividen a todos los denominadores
 - b. Que el numerador, tras dividir entre el índice, es primo
 - c. Que los números crecen sin límite
 - d. Que el cinco aparece en el denominador para el índice veinte

Respuestas

1. a) Dice que, para conocer sus propiedades, conviene calcular primero unos cuantos: reunir ejemplares antes de enunciar leyes.
2. b) Su segunda observación es que el denominador contiene siempre el dos y el tres, cada uno exactamente una vez.

3. b) El numerador para el índice veinte, ciento setenta y cuatro mil seiscientos once, es doscientos ochenta y tres por seiscientos diecisiete, así que no es primo.

Ejemplos resueltos

Un valor de la recurrencia Una ecuación de la recurrencia dice que el cuarto número de Bernoulli, menos un tercio del primero, es igual a menos un cuarenta y cincoavo. Si el primero vale un sexto, halle el cuarto.

Un tercio de un sexto es un dieciochoavo.

Así que el cuarto es igual a un dieciochoavo menos un cuarenta y cincoavo.

En noventavos, son cinco noventavos menos dos noventavos, tres noventavos.

Tres noventavos es un treintavo.

Respuesta: Un treintavo

Ejercicios

1. Compruebe la afirmación del numerador primo para el índice veinte: ¿doscientos ochenta y tres por seiscientos diecisiete da el numerador?

Pista: Multiplique doscientos ochenta y tres por seiscientos, luego por diecisiete, y sume.

Respuesta: Sí: doscientos ochenta y tres por seiscientos son ciento sesenta y nueve mil ochocientos, y doscientos ochenta y tres por diecisiete son cuatro mil ochocientos once; juntos, ciento setenta y cuatro mil seiscientos once, así que el numerador no es primo.

2. Con sus propias palabras, ¿qué dice la regla de Ramanujan sobre un primo que divide al índice?

Pista: Piense en los ejemplos del once para el índice veintidós y del cinco para el índice treinta.

Respuesta: Ese primo aparece o en el denominador o en el numerador de ese número de Bernoulli. Si falta en el denominador, como el once para el índice veintidós, debe dividir al numerador, y al revés.

Una receta para los denominadores

He aquí un juego que puede jugar con un lápiz. Tome el número veinticuatro y anote todo lo que lo divide: uno, dos, tres, cuatro, seis, ocho, doce, veinticuatro. Sumo uno a cada uno: dos, tres, cuatro, cinco, siete, nueve, trece, veinticinco. Tache todos los que no sean primos y multiplique lo que queda: dos por tres por cinco por siete por trece son dos mil setecientos treinta. Ahora mire la tabla de Ramanujan: el número de Bernoulli de índice veinticuatro tiene exactamente ese denominador.

DIVISORES DE 24

	1	2	3	4	6	8	12	24
+1 ↓	2	3	~~4~~	5	7	~~9~~	13	~~25~~

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 2730$$

$$B_{24} = \frac{236364091}{2730}$$

$$20 : 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 330 \qquad 30 : 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31 = 14322$$

El juego del lápiz para 24

Esa es su regla de los denominadores. Observó que todos los denominadores son divisibles por seis, los de índices múltiplos de cuatro por cinco, los de múltiplos de seis por siete, los de múltiplos de diez por once, e infirió la receta general: el denominador es el producto de los primos que son uno más que un divisor del índice, contando el uno y el propio índice. Los divisores impares distintos de uno pueden saltarse, porque uno más que un número impar es par y, por tanto, no es primo. Para el índice veinte la receta da dos, tres, cinco y once, que multiplicados dan trescientos treinta, el denominador de la tabla; para el índice treinta da dos, tres, siete, once y treinta y uno, que multiplicados dan catorce mil trescientos veintidós.

Después mira las partes fraccionarias, lo que queda tras quitar la parte entera. Descompone cada una en piezas sencillas y encuentra una regla: la parte fraccionaria es la suma de uno entre cada primo del denominador, menos uno, con toda la expresión tomando un signo más o menos que se alterna con el índice. Para el índice dieciséis los primos son dos, tres, cinco y diecisiete; un medio más un tercio más un quinto más un diecisieteavo, menos uno, son cuarenta y siete entre quinientos diez. Y el número de Bernoulli de índice dieciséis, tres mil seiscientos diecisiete entre quinientos diez, es exactamente siete más cuarenta y siete entre quinientos diez. Para el índice veintidós los signos se invierten: uno, menos un medio, menos un tercio, menos un veintitresavo, son diecisiete entre ciento treinta y ocho.

PARTE FRACCIONARIA

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17} - 1 = \frac{47}{510}$$

$$\frac{3617}{510} = 7 + \frac{47}{510}$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{23} = \frac{17}{138}$$

La parte que sobra

De esto saca una consecuencia sobre las parejas: si dos números de Bernoulli tienen el mismo denominador, entonces su diferencia, o su suma cuando los signos lo exigen, es un número entero. Los índices doce y veinticuatro comparten el denominador dos mil setecientos treinta, así que la diferencia de esos dos números es entera; lo mismo vale para dieciséis y treinta y dos. Para los índices diez y veinte los denominadores solo se diferencian en un cinco, y su suma tiene denominador exactamente cinco.

Añade dos observaciones más sobre restos. Cuando el índice es múltiplo de cuatro, el número menos un treintavo tiene un numerador divisible por veinte: para el índice doce, seiscientos noventa y uno entre dos mil setecientos treinta menos un treintavo

son veinte entre noventa y uno, y veinte es en efecto el numerador. Cuando el índice no es múltiplo de cuatro, el número dividido entre el índice, menos un doceavo, tiene un numerador divisible por cinco: para el índice diez esto da menos cinco entre sesenta y seis. Por último, ciertos números enteros contruidos con estos números de Bernoulli y potencias de dos dejan siempre resto uno al dividirlos entre treinta; para el índice dos, el primero de ellos es simplemente uno, que es treinta por nada más uno.

Para recordar

La regla de los denominadores de Ramanujan: tome cada divisor del índice, súmele uno, quédese con los primos y multiplíquelos; para veinticuatro eso da dos mil setecientos treinta. La parte fraccionaria de cada número de Bernoulli es la suma de uno entre cada primo de su denominador, menos uno, con un signo alterno; para el índice dieciséis es cuarenta y siete entre quinientos diez. Así, dos números de Bernoulli con el mismo denominador se diferencian en un número entero, y otras reglas restringen sus numeradores mediante la divisibilidad por veinte o por cinco y restos uno al dividir entre treinta.

Preguntas

1. ¿Cómo encuentra la regla de Ramanujan el denominador para un índice dado?

- a. Tomando los divisores del índice, sumando uno a cada uno, quedándose con los primos y multiplicándolos
 - b. Multiplicando todos los primos menores que el índice
 - c. Sumando uno al índice y elevándolo al cuadrado
 - d. Tomando el mayor divisor primo del índice
2. ¿Qué da la regla de la parte fraccionaria para el índice dieciséis?
- a. Un diecisieteavo
 - b. Cuarenta y siete entre quinientos diez
 - c. Siete
 - d. Diecisiete entre ciento treinta y ocho
3. ¿Por qué es entera la diferencia de los números de Bernoulli de índices doce y veinticuatro?
- a. Porque ambos son números enteros
 - b. Porque comparten el mismo denominador, así que sus partes fraccionarias se cancelan
 - c. Porque veinticuatro es el doble de doce
 - d. Porque ambos numeradores son primos

Respuestas

- 1. a)** El denominador es el producto de los primos que son uno más que un divisor del índice, contando el uno y el propio índice.
- 2. b)** Un medio más un tercio más un quinto más un diecisieteavo, menos uno, son cuarenta y siete entre quinientos diez.
- 3. b)** Si dos números de Bernoulli tienen el mismo denominador, su diferencia, o su suma cuando los signos lo exigen, es un número entero; doce y veinticuatro comparten dos mil setecientos treinta.

Ejemplos resueltos

El denominador para el índice veinte Use la regla de los denominadores para hallar el denominador del número de Bernoulli de índice veinte.

Los divisores de veinte son uno, dos, cuatro, cinco, diez y veinte.

Los divisores impares distintos de uno pueden saltarse, así que se usan uno, dos, cuatro, diez y veinte.

Sumar uno da dos, tres, cinco, once y veintiuno.

Veintiuno no es primo, así que se conservan dos, tres, cinco y once, y se multiplican: trescientos treinta.

Respuesta: Trescientos treinta

Ejercicios

1. Compruebe la regla de los numeradores divisibles por veinte para el índice doce: ¿cuánto es seiscientos noventa y uno entre dos mil setecientos treinta, menos un treintavo?

Pista: Un treintavo es noventa y uno entre dos mil setecientos treinta.

Respuesta: Seiscientos entre dos mil setecientos treinta, que se simplifica a veinte entre noventa y uno, y veinte es divisible por veinte.

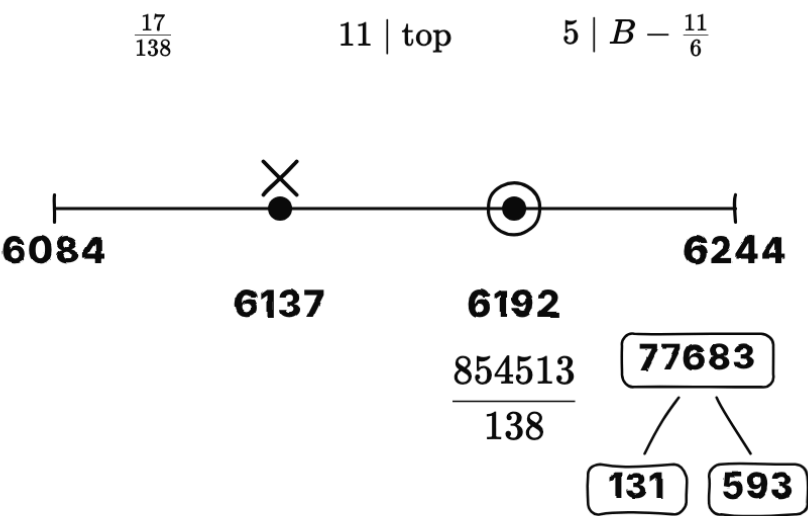
2. Use la regla de la parte fraccionaria para el índice veintidós: uno, menos un medio, menos un tercio, menos un veintitresavo.

Pista: Ponga todo con denominador ciento treinta y ocho.

Respuesta: Ciento treinta y ocho, menos sesenta y nueve, menos cuarenta y seis, menos seis, todo entre ciento treinta y ocho, es decir, diecisiete entre ciento treinta y ocho.

Cómo fijar un número a partir de su tamaño

Piense en un juego de adivinanzas: alguien esconde un número entre seis mil y pico y seis mil doscientos y pico, y le da tres pistas sobre sus cifras. Con las pistas adecuadas, ciento sesenta posibilidades se reducen a dos. Ramanujan juega exactamente a este juego con un número de Bernoulli, y luego muestra de dónde sale el tamaño aproximado.



Tres pistas, dos sospechosos

Su ejemplo es el número de Bernoulli de índice veintidós, y supone que solo sabemos que está entre seis mil ochenta y cuatro y seis mil doscientos cuarenta y cuatro. La primera pista es la parte fraccionaria, que la regla de la parte anterior fija en diecisiete entre ciento treinta y ocho. La segunda es que el once divide al índice, y el once falta en el denominador, así que debe dividir al numerador. La tercera es la regla de restos: este número menos once sextos debe tener un numerador divisible por cinco. Solo dos candidatos pasan las tres: seis mil ciento treinta y siete y diecisiete ciento treintaiochoavos, y seis mil ciento noventa y dos y la misma fracción.

Para elegir entre ellos, Ramanujan usa su conjetura de que el numerador, dividido entre once, es primo. El numerador del primer candidato es divisible además por siete y por diecisiete, así que lo descarta y se queda con el segundo, ochocientos cincuenta y cuatro mil quinientos trece entre ciento treinta y ocho. Ese es el valor correcto, como muestra su propia tabla, pero el último paso no es sólido: ese numerador, dividido entre once, es ciento treinta y uno por quinientos noventa y tres, que tampoco es primo. El método de las pistas es bueno; la pista del cociente primo es el eslabón débil.

¿De dónde salen esos límites aproximados? La sección once cita una fórmula clásica: un número de Bernoulli es igual a dos, por el factorial de su índice, dividido entre dos pi elevado al índice, por la suma de uno entre cada número entero elevado a ese índice. Esa última suma es apenas mayor que uno para índices grandes, así que el tamaño lo gobierna el factorial frente a la potencia de dos pi. Para el índice dos, la suma de uno entre los cuadrados es pi al cuadrado entre seis, un resultado famoso, y la fórmula da dos por dos, entre cuatro pi al cuadrado, por pi al cuadrado entre seis, que es exactamente un sexto. La misma suma puede escribirse como un producto sobre todos los

primos, y la fórmula puede escribirse también como una integral, que Ramanujan deduce desarrollando una fracción en serie geométrica.

$$B_n = \frac{2n!}{(2\pi)^n} \left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots\right)$$

$$\frac{2 \cdot 2}{4\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{6}$$

$$1 + \frac{1}{2^n} + \dots = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-n}}$$

$$\log 10! \approx 15.10441$$

$$\log 3628800 = 15.10441$$

FALTAN DECIMALES

El tamaño a partir de un factorial

Tomando logaritmos, usa el conocido desarrollo del logaritmo de un factorial, cuyos términos, tras los primeros, están contruidos a su vez con números de Bernoulli, con un resto que es siempre una fracción del término siguiente. Para diez factorial, sus primeros términos dan quince coma uno cero cuatro cuatro uno, y el logaritmo verdadero de tres millones seiscientos veintiocho mil ochocientos coincide en todas las cifras mostradas. Así, la parte entera de un número de Bernoulli puede estimarse a partir de su tamaño, y la parte fraccionaria sale de la regla de los primos; juntas dan el valor exacto. La pega, admite Ramanujan, es que para índices grandes esto exige logaritmos con

más decimales de los que da ninguna tabla, y promete una manera de sortearla más adelante.

Para recordar

Unos límites aproximados más tres pistas aritméticas, la parte fraccionaria, la divisibilidad por un primo del índice y una regla de restos, reducen el número de Bernoulli de índice veintidós a dos candidatos. La elección final de Ramanujan se apoya en su conjetura del cociente primo, que aquí es falsa, aunque el valor que elige es el correcto. Una fórmula clásica da el tamaño de cada número de Bernoulli a partir de un factorial, una potencia de dos pi y una suma apenas mayor que uno, y, mediante el logaritmo del factorial, da la parte entera, siempre que se disponga de logaritmos muy precisos.

Preguntas

1. ¿Qué tres pistas reducen el número de Bernoulli de índice veintidós a dos candidatos?
 - a. Su parte fraccionaria, la divisibilidad de su numerador por once y una regla de restos con once sextos y cinco
 - b. Su primera cifra, su última cifra y su longitud
 - c. El valor de pi, el factorial y el logaritmo
 - d. Su denominador, su cuadrado y su raíz cuadrada

2. ¿Por qué el último paso de la elección de Ramanujan no es sólido, aunque el valor sea correcto?
 - a. Porque el numerador elegido, dividido entre once, tampoco es primo
 - b. Porque los límites eran erróneos
 - c. Porque la parte fraccionaria es distinta
 - d. Porque el siete no divide al primer candidato
3. Según la fórmula clásica, ¿qué decide principalmente el tamaño de un número de Bernoulli?
 - a. El factorial de su índice frente a una potencia de dos π
 - b. La cantidad de primos menores que su índice
 - c. Su denominador
 - d. La cotangente de su índice

Respuestas

1. **a)** La parte fraccionaria queda fijada en diecisiete entre ciento treinta y ocho, el once debe dividir al numerador, y el número menos once sextos debe tener un numerador divisible por cinco.
2. **a)** Se apoya en que el numerador dividido entre once sea primo, pero para el valor elegido es ciento treinta y uno por quinientos noventa y tres.
3. **a)** La suma de la fórmula es apenas mayor que uno para índices grandes, así que el tamaño lo gobierna el factorial frente a la potencia de dos π .

Ejemplos resueltos

Un sexto con la fórmula del tamaño Use la fórmula clásica para el índice dos, con la suma de uno entre los cuadrados igual a π al cuadrado entre seis, para hallar el primer número de Bernoulli.

Dos por el factorial de dos es cuatro.

Dos pi elevado a dos es cuatro pi al cuadrado, así que el factor es cuatro entre cuatro pi al cuadrado, uno entre pi al cuadrado.

Multiplicar uno entre pi al cuadrado por pi al cuadrado entre seis da un sexto.

Respuesta: Un sexto

Ejercicios

1. ¿Por qué unos límites aproximados de un número de Bernoulli pueden llevar a su valor exacto?

Pista: Piense en lo que ya le dice la regla de la parte fraccionaria.

Respuesta: La parte fraccionaria se conoce exactamente por los primos del denominador, así que solo falta la parte entera. Los límites aproximados dejan un intervalo de números enteros, y las reglas aritméticas sobre el numerador descartan todos salvo unos pocos; un dato más elige el correcto.

2. Diez factorial es tres millones seiscientos veintiocho mil ochocientos. ¿Por qué comprobar su logaritmo es una buena prueba del desarrollo que usa Ramanujan?

Pista: Compare los primeros términos del desarrollo con el valor verdadero.

Respuesta: El logaritmo natural verdadero es unos quince coma uno cero cuatro cuatro uno, y los primeros términos del desarrollo ya dan las mismas cifras, lo que muestra con qué precisión estima tamaños el desarrollo; el mismo desarrollo, aplicado a la fórmula del tamaño, estima la parte entera de un número de Bernoulli.

Un camino hacia la demostración, con un hueco

Pruebe a sumar uno entre once al cuadrado, uno entre doce al cuadrado, uno entre trece al cuadrado, y así indefinidamente. El resultado es unos cero coma cero nueve cinco uno seis seis. Hay un atajo que da casi todas esas cifras con tres términos: un décimo, menos uno entre doscientos, más un sexto dividido entre mil. El sexto de ese atajo es el primer número de Bernoulli, y la sección doce trata de cómo atajos así podrían demostrar los patrones que Ramanujan había observado.

$$\frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{13^2} + \dots$$

$$\approx 0.0951663$$

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{200} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{first Bernoulli}} \cdot \frac{1}{1000} = 0.0951667$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{B_2}{n^3} - \frac{B_4}{n^5} + \dots$$

$$\text{left out} \approx 3 \cdot 10^{-7}$$

Un atajo de tres términos

El atajo sale del logaritmo del factorial, cuyo desarrollo vimos en la parte anterior. Derivarlo dos veces da la cola de la suma de inversos de cuadrados, empezando justo después de un número n , como una serie en potencias de uno entre n : uno entre n , menos uno entre el doble de n al cuadrado, más el primer número de Bernoulli entre n al cubo, menos el segundo entre n a la quinta, y así sucesivamente. Esta serie no converge si se toma entera, así que Ramanujan se detiene tras algún término y controla el resto. Lo que sobra es siempre una fracción, entre nada y el todo, del primer término que omitió, y lo respalda con una fórmula integral. Para n igual a diez, el primer término omitido es de unas tres diezmillonésimas, y por eso tres términos ya daban seis cifras correctas.

Ahora la idea principal. Escribe una combinación larga: esa misma cola, un par de términos sencillos y una suma que recorre los primos, con un término por cada primo mayor que tres. Afirma que toda la combinación puede reescribirse como una serie en potencias de uno entre x cuyos coeficientes son todos números enteros, empezando por uno entre x a la decimoquinta, menos siete entre x a la decimoséptima, y así sucesivamente. Si esa afirmación es cierta, comparar coeficientes obliga a que ciertas combinaciones sean números enteros: el primer número de Bernoulli menos un sexto; menos el segundo, menos un sexto, más un quinto; y así sucesivamente, cada una con uno entre cada primo que corresponde a ese número de Bernoulli.

COMBINACIÓN

$$\longrightarrow \frac{1}{x^{15}} - \frac{7}{x^{17}} + \dots$$

¿ENTEROS?

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$$

$$-\frac{1}{30} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = 0$$

$$\frac{7}{6} - \frac{1}{6} = 1$$

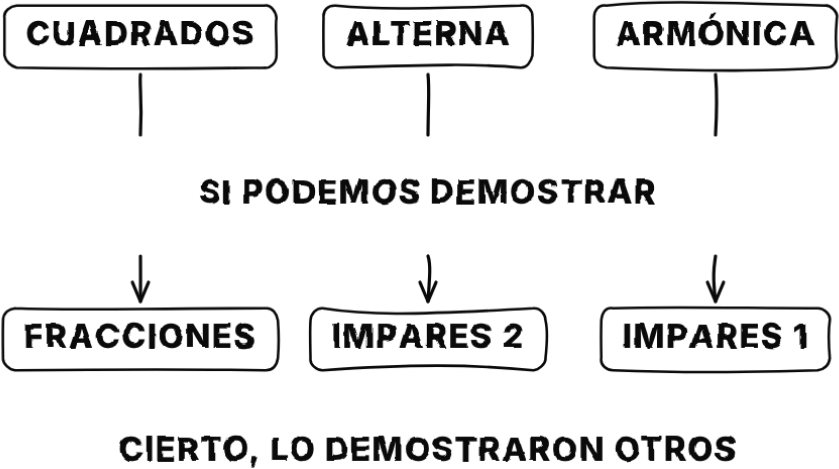
$$-\frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1$$

La afirmación y sus primeras comprobaciones

Compruébelas con los valores conocidos. Un sexto menos un sexto es nada. Menos un treintavo, menos un sexto, más un quinto es menos un treintavo, menos cinco treintavos, más seis treintavos, es decir, nada otra vez. Para el séptimo número de Bernoulli, siete sextos, menos un sexto, el resultado es uno, exactamente el primer coeficiente que escribió en el otro miembro. Escribir menos un sexto como un medio más un tercio menos uno convierte esto en la regla de las partes fraccionarias de las secciones anteriores, y de ella se sigue la regla de los denominadores iguales.

Luego repite el truco dos veces. Tomando la misma cola con signos alternos, obtiene una serie cuyos coeficientes son números de Bernoulli multiplicados por uno menos que una potencia de dos; si el

doble de esa cola alterna tuviera coeficientes enteros, se seguiría la segunda mitad de su afirmación de los impares. De la primera derivada del logaritmo del factorial, en la que intervienen la suma armónica y la constante de Euler, obtiene otra serie alterna; unos coeficientes enteros ahí darían la primera mitad de la afirmación de los impares.



Tres caminos, un puente que falta

Cada camino termina con las mismas palabras: si podemos demostrar. Nunca demuestra las afirmaciones de los coeficientes enteros, y los editores de los artículos reunidos lo señalan, añadiendo que algunos pasos usan series que no convergen. Así que la sección doce es un mapa cuidadoso de cómo podrían demostrarse los

patrones, con el propio puente todavía por construir; los patrones a los que apunta son ciertos, y otros los habían demostrado antes.

Para recordar

La cola de la suma de inversos de cuadrados tiene una serie atajo cuyos coeficientes son números de Bernoulli, y truncarla deja un error menor que el primer término omitido. Ramanujan reduce la regla de la parte fraccionaria y las afirmaciones de los impares a la afirmación de que ciertas series tienen coeficientes enteros, y los primeros coeficientes salen, en efecto, enteros. Nunca demuestra esa afirmación, así que esta sección es un camino hacia demostraciones, no una demostración.

Preguntas

1. ¿Por qué puede Ramanujan detener la serie de la cola tras unos pocos términos?
 - a. Porque lo que sobra es siempre una fracción del primer término que omitió
 - b. Porque los términos restantes valen todos cero
 - c. Porque la serie converge tras tres términos
 - d. Porque la cola vale exactamente un décimo
2. ¿En qué afirmación se apoya todo el camino de la demostración?

- a. En que una combinación de sumas de inversos de cuadrados y de primos tiene coeficientes enteros
 - b. En que todo número de Bernoulli es primo
 - c. En que π es una fracción
 - d. En que el factorial crece despacio
3. ¿Qué ocurre con el coeficiente del séptimo número de Bernoulli, siete sextos?
- a. Siete sextos menos un sexto da uno, que coincide con el primer coeficiente del otro miembro
 - b. Da cero
 - c. Da una fracción
 - d. No puede calcularse

Respuestas

1. a) Lo que sobra es siempre una fracción, entre nada y el todo, del primer término que omitió.
2. a) Afirma que toda la combinación puede reescribirse como una serie en potencias de uno entre x cuyos coeficientes son todos números enteros.
3. a) Siete sextos menos un sexto es uno, exactamente el primer coeficiente que escribió en el otro miembro.

Ejemplos resueltos

Un coeficiente que se anula Compruebe que menos el segundo número de Bernoulli, menos un sexto, más un quinto es un número entero, con el segundo número de Bernoulli igual a un treintavo.

Escriba todo en treintavos: menos un treintavo, menos cinco treintavos, más seis treintavos.

Sume: menos uno, menos cinco, más seis, es nada.

Así que el coeficiente es cero, un número entero.

Respuesta: Cero

Ejercicios

1. Compruebe que el tercer número de Bernoulli, un cuarentaidosavo, menos un sexto, más un séptimo, es un número entero.

Pista: Escriba todo en cuarentaidosavos.

Respuesta: Un cuarentaidosavo, menos siete cuarentaidosavos, más seis cuarentaidosavos es nada, un número entero.

2. Con sus propias palabras, ¿qué diferencia hay entre un camino hacia una demostración y una demostración?

Pista: Piense en las palabras «si podemos demostrar».

Respuesta: Un camino muestra que el resultado se seguiría de otra afirmación; una demostración establece además esa afirmación.

Ramanujan muestra que sus patrones se seguirían de unos coeficientes enteros, pero nunca los demuestra, así que su argumento todavía no demuestra los patrones.

Describir un gigante sin escribirlo

¿Cuántas cifras tiene dos elevado a cien? No hace falta multiplicar: el logaritmo de dos es unos cero coma tres, así que cien doses dan unos treinta coma uno, lo que significa treinta y una cifras. Los logaritmos miden el tamaño sin calcular, y Ramanujan los usa para describir números de Bernoulli muy por encima de su tabla.

2^{100} has how many digits?

$$100 \times 0.301 = 30.1 \Rightarrow 31 \text{ digits}$$

TAMAÑO SIN CALCULAR

$$\log_{10} B_n \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \log_{10} n - 1.23247 n + 0.7$$

$$\text{true value} \approx \dots + \frac{0.036}{n}$$

$$n = 20 : 20.5 \times 1.301 - 24.65 + 0.7 \approx 2.722$$

$$2.722 + 0.002 \approx 2.724 = \log_{10} 529.12$$

Cifras a partir de logaritmos

Su fórmula de las cifras dice: el logaritmo en base diez de un número de Bernoulli es aproximadamente el índice más un medio, por el logaritmo del índice, menos uno coma dos tres dos cuatro siete por el

índice, más cero coma siete. La obtiene del puente clásico de la parte anterior tomando logaritmos y quedándose con los términos principales del factorial, y observa que el valor verdadero es algo mayor, en unas tres centésimas divididas entre el índice. Pruébela con el índice veinte: veinte y medio por uno coma tres, menos unos veinticuatro coma seis cinco, más cero coma siete, da unos dos coma siete dos dos, y sumar la pequeña corrección da dos coma siete dos cuatro, un número de unos quinientos veintinueve; el décimo valor de la tabla es, en efecto, de unos quinientos veintinueve.

Después compara vecinos. Al dividir la fórmula del puente para un índice entre la misma fórmula dos lugares antes, casi todo se cancela, y el cociente de los dos números de Bernoulli es el índice por uno menos que el índice, dividido entre cuatro pi al cuadrado, por unos factores de corrección extremadamente cercanos a uno. Así que cada número de Bernoulli es, casi exactamente, el anterior multiplicado por esa cantidad sencilla, y la aproximación mejora deprisa a medida que crece el índice. Para el índice dieciséis, el multiplicador es doscientos cuarenta entre unos treinta y nueve coma cinco, más o menos seis coma cero ocho, y seis coma cero ocho por siete sextos son unos siete coma cero nueve. Así que el octavo número de Bernoulli está entre siete y ocho, y, con la regla de los primos, su valor exacto es seis, más un medio, más un tercio, más un quinto, más un diecisieteavo, es decir, tres mil seiscientos diecisiete entre quinientos diez. Ramanujan sube así por la tabla, peldaño a peldaño, hasta el décimo número.

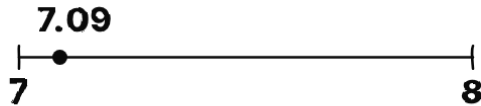
$$B_2 \rightarrow B_4 \rightarrow \cdots \rightarrow B_{20}$$

$$\frac{B_n}{B_{n-2}} = \frac{n(n-1)}{4\pi^2} \left(1 - \frac{2^2-1}{2^n-1}\right) \left(1 - \frac{3^2-1}{3^n-1}\right) \cdots$$

$$B_n \approx \frac{n(n-1)}{4\pi^2} B_{n-2}$$

$$\frac{16 \cdot 15}{4\pi^2} = \frac{240}{39.5} \approx 6.08$$

$$6.08 \times \frac{7}{6} \approx 7.09$$



$$6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17} = \frac{3617}{510}$$

Subir con cocientes

Luego llega la pieza estrella: el número de Bernoulli de índice cuatrocientos cuarenta y cuatro. Su parte fraccionaria sale de la regla de los primos: una fracción con un denominador de noventa millones setecientos nueve mil setecientos diez. La fórmula de las cifras da un logaritmo de unos seiscientos treinta coma dos cuatro, así que su parte entera tiene seiscientos treinta y una cifras y empieza por uno, siete, cinco, uno. Sumando el logaritmo del denominador, el numerador completo tiene seiscientos treinta y nueve cifras y empieza por uno, cinco, ocho, ocho. Y la regla de restos anterior, la divisibilidad por veinte tras restar un treintavo, fija el final: la parte entera termina en cuatro con una cifra par delante, y el numerador termina en cincuenta y siete con una cifra par delante. El software moderno confirma todas estas afirmaciones sobre las cifras; un paso

usa su conjetura del cociente primo, de la que, como vimos, no puede uno fiarse en general.

B_{444}

DENOMINADOR 90709710

$$\times \frac{n(n-1)}{4\pi^2}$$

ENTERA: 631 CIFRAS, 1751...

...P4

NUMERADOR: 639 CIFRAS, 1588...

...P57

P PAR



COMPROBADO POR ORDENADOR

UN PASO: ¿CONJETURA?

El gigante B444

Para recordar

La fórmula de las cifras de Ramanujan da el logaritmo de un número de Bernoulli solo a partir de su índice, y por tanto su número de cifras y sus primeras cifras. Cada número de Bernoulli es casi exactamente el anterior por el índice, por uno menos que el índice, entre cuatro π al cuadrado, lo que le permite subir por la tabla y fijar los valores exactos con la regla de los primos. Para el índice cuatrocientos cuarenta y cuatro describe la longitud del número, sus primeras cifras y sus últimas cifras sin escribirlo nunca.

Preguntas

1. ¿Qué da la fórmula de las cifras de Ramanujan solo a partir del índice?
 - a. El logaritmo de un número de Bernoulli, y por tanto su número de cifras y sus primeras cifras
 - b. Su numerador exacto
 - c. Si es primo
 - d. Su denominador
2. ¿Cuánto vale, casi exactamente, el cociente de un número de Bernoulli entre el que está dos lugares antes?
 - a. El índice por uno menos que el índice, dividido entre cuatro π al cuadrado
 - b. Dos

- c. El índice dividido entre π
 - d. Uno
3. ¿Cuál de las afirmaciones de Ramanujan sobre el número de índice cuatrocientos cuarenta y cuatro no pisa terreno firme?
- a. El paso que usa su conjetura del cociente primo
 - b. Su número de cifras
 - c. Sus primeras cifras
 - d. Su parte fraccionaria

Respuestas

1. a) Su fórmula de las cifras da el logaritmo en base diez de un número de Bernoulli a partir de su índice, lo que indica su número de cifras y sus primeras cifras.
2. a) El cociente es el índice por uno menos que el índice, dividido entre cuatro π al cuadrado, por unos factores de corrección extremadamente cercanos a uno.
3. a) El software moderno confirma todas las afirmaciones sobre las cifras; un paso usa su conjetura del cociente primo, de la que no puede uno fiarse en general.

Ejemplos resueltos

El octavo número de Bernoulli a partir del séptimo Con el cociente entre vecinos para el índice dieciséis y el séptimo número de Bernoulli, siete sextos, halle el octavo.

El multiplicador es dieciséis por quince, doscientos cuarenta, entre cuatro π al cuadrado, unos treinta y nueve coma cinco, es decir, unos seis coma cero ocho.

Seis coma cero ocho por siete sextos son unos siete coma cero nueve, así que el número está entre siete y ocho.

La regla de los primos da la parte fraccionaria: un medio más un tercio más un quinto más un diecisieteavo, menos uno, que son cuarenta y siete entre quinientos diez.

Así que el valor exacto es siete y cuarenta y siete quinientosdiezavos, es decir, tres mil seiscientos diecisiete entre quinientos diez.

Respuesta: Tres mil seiscientos diecisiete entre quinientos diez

Ejercicios

1. ¿Cuántas cifras tiene dos elevado a cien?

Pista: El logaritmo en base diez de dos es unos cero coma tres cero uno.

Respuesta: Treinta y una: cien por cero coma tres cero uno son unos treinta coma uno, y un número cuyo logaritmo es treinta y pico tiene treinta y una cifras.

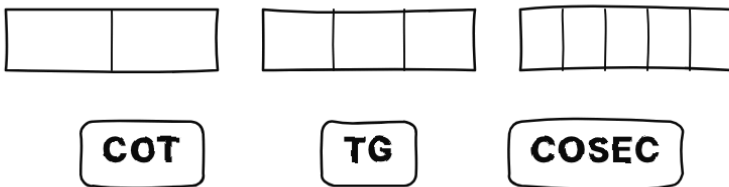
2. La fórmula de las cifras da un logaritmo de unos seiscientos treinta coma dos cuatro para el número de índice cuatrocientos cuarenta y cuatro. ¿Cuántas cifras tiene su parte entera?

Pista: Sume uno a la parte entera del logaritmo.

Respuesta: Seiscientos treinta y una cifras.

Otros puntos de partida, y cribas de cinco vías

Imagine un juego de cribas para clasificar grava: una la separa en dos, otra más fina en tres, otra más fina todavía en cinco. El método de Ramanujan ha venido funcionando como esas cribas sobre los números de Bernoulli, y en estas secciones lo amplía en dos direcciones.



CON POTENCIAS DE 2

$$\frac{4}{3}B_n(2^n - 1) = c_6B_{n-6}(2^{n-6} - 1) - \dots + \frac{1}{3}n$$

$$n = 6 : \quad \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{42} \cdot 63 = 2 = \frac{1}{3} \cdot 6 \quad \checkmark$$

$$\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \dots = \dots 3^k$$

$$n = 5 : \quad \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \quad \checkmark$$

Tangente y cosecante

Primero, la función de partida. Todo hasta ahora empezaba con la cotangente, pero él observa que la tangente y la cosecante, otras dos

funciones de la trigonometría escolar, sirven igual de bien. Dan relaciones del mismo tipo, ahora con potencias de dos mezcladas. Una de ellas dice que cuatro tercios de un número de Bernoulli, por uno menos que dos elevado a su índice, es igual a una suma alternada de números de Bernoulli anteriores separados de seis en seis, cada uno con un factor semejante, más un último término que es un tercio o un sexto del índice. Compruébela con el índice seis: cuatro tercios, por un cuarentaidosavo, por sesenta y tres, da dos; y el último término, un tercio de seis, también es dos. Una segunda relación usa factores de uno menos una potencia de un medio, y potencias de tres en el otro miembro; para el índice cinco, ambos miembros dan cinco sextos.

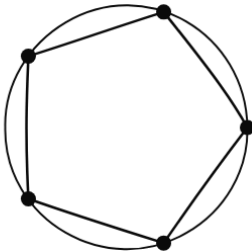
Segundo, el número de maneras de cancelar. Ramanujan llama a sus resultados anteriores fórmulas de un intervalo, de dos intervalos y de tres intervalos, según lo separados que quedan los números de Bernoulli que sobreviven. Luego enuncia la regla general: tome los números cuya potencia p -ésima es uno, o cuya potencia p -ésima es la unidad imaginaria cuando p es par, mézclelos en la cotangente y obtendrá fórmulas de p intervalos. Cada una de esas fórmulas conserva solo una hebra de números de Bernoulli, separados de dos p en dos p .

MANERAS DE CANCELAR

1 INTERVALO 2 INTERVALOS 3 INTERVALOS

$$\omega^p = 1 \text{ (or } i) \rightarrow \cot \rightarrow p\text{-interval}$$

spacing $2p$



$$\sum_{k=0}^4 \sin x \alpha^k \\ = 5 \left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^{15}}{15!} + \dots \right)$$

1 POTENCIA DE 10

Cinco raíces en un pentágono

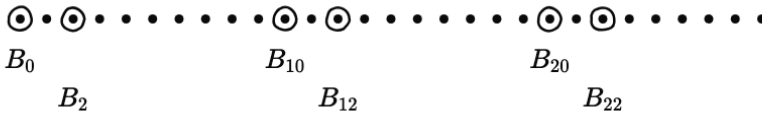
Desarrolla el caso de cinco. Las cinco raíces quintas de uno están en los vértices de un pentágono regular sobre una circunferencia. Al sumar los senos de x por cada una de ellas, todo se cancela salvo una potencia de cada diez: la suma es cinco veces x a la quinta entre cinco factorial, menos x a la quince entre quince factorial, y así sucesivamente. Un producto de cinco senos se convierte entonces en una combinación de esta suma en tres argumentos especiales, en los que aparece uno más o menos la raíz cuadrada de cinco. La raíz cuadrada de cinco trae consigo la razón áurea, unos uno coma seis uno ocho, y con ella una sucesión de números enteros formados con sus potencias, uno, tres, cuatro, siete, once, cada uno la suma de los dos anteriores, primos hermanos de los números de Fibonacci.

$$1 \pm \sqrt{5}$$

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

$$1, 3, 4, 7, 11, \dots$$

$$3 + 4 = 7, \quad 4 + 7 = 11$$



$$-x \cdot \frac{x^4/24}{x^5/120} = -5 \quad \checkmark$$

COSENOS: MÁS

TG, COSEC TAMBIÉN

spacing $2p$

Hebras de la razón áurea

Con estos números enteros escribe cinco fórmulas nuevas, cada una un cociente de dos series que aísla una hebra: los números de Bernoulli de índice cero, diez, veinte; luego los de índice dos, doce, veintidós; y así sucesivamente. Puede probar la primera: para un x diminuto, su segundo miembro es menos x , por x a la cuarta entre veinticuatro, dividido entre x a la quinta entre ciento veinte, que da menos cinco; el primer miembro empieza con cinco veces el número de Bernoulli de índice cero, y como ese número es menos uno, cinco veces él es menos cinco, así que ambos miembros coinciden. Añade que una identidad semejante construida con el producto de cinco cosenos da muchas más identidades de este tipo.

Para recordar

La tangente y la cosecante pueden sustituir a la cotangente y dan nuevas relaciones entre números de Bernoulli, que se cumplen para índices pequeños. Mezclar las raíces p -ésimas de uno en la cotangente da fórmulas de p intervalos, cada una de las cuales conserva una hebra de números de Bernoulli separados de dos p en dos p . En el caso de cinco intervalos, el pentágono trae la razón áurea y los números enteros uno, tres, cuatro, siete, once, y cada fórmula aísla un número de Bernoulli de cada diez por índice.

Preguntas

1. ¿Qué funciones pueden sustituir a la cotangente como punto de partida?
 - a. La tangente y la cosecante
 - b. El logaritmo y la exponencial
 - c. La raíz cuadrada
 - d. Solo el seno
2. ¿Qué conserva una fórmula de p intervalos?
 - a. Una hebra de números de Bernoulli separados de dos p en dos p
 - b. Todos los números de Bernoulli
 - c. Solo los p primeros números de Bernoulli
 - d. Solo los números de Bernoulli de índice primo

3. ¿De dónde sale la razón áurea en el caso de cinco intervalos?
- a. De la raíz cuadrada de cinco que aparece con las raíces quintas de uno
 - b. Del número pi
 - c. Del factorial
 - d. De los denominadores

Respuestas

1. a) Él observa que la tangente y la cosecante sirven igual de bien que la cotangente.
2. a) Cada una de esas fórmulas conserva solo una hebra de números de Bernoulli, separados de dos p en dos p.
3. a) La raíz cuadrada de cinco trae consigo la razón áurea, unos uno coma seis uno ocho.

Ejemplos resueltos

La relación de la tangente para el índice seis Compruebe la primera relación de la tangente para el índice seis: cuatro tercios del tercer número de Bernoulli, un cuarentaidosavo, por uno menos que dos elevado a seis, debería ser igual al último término, un tercio de seis.

Dos elevado a seis es sesenta y cuatro, y uno menos es sesenta y tres.

Cuatro tercios por un cuarentaidosavo por sesenta y tres: sesenta y tres cuarentaidosavos son tres medios, y cuatro tercios de tres medios son dos.

Un tercio de seis también es dos, así que ambos miembros coinciden.

Respuesta: Ambos miembros valen dos

Ejercicios

1. Continúe los números enteros uno, tres, cuatro, siete, once: ¿cuáles son los dos siguientes?

Pista: Cada uno es la suma de los dos anteriores.

Respuesta: Dieciocho y veintinueve: siete más once son dieciocho, y once más dieciocho son veintinueve.

2. En el caso de cinco intervalos, ¿qué números de Bernoulli conserva la primera fórmula, por índice?

Pista: Las hebras están separadas de dos veces cinco en dos veces cinco.

Respuesta: Los de índice cero, diez, veinte, treinta, etcétera.

La criba de cuatro vías y el veredicto final

La criba de cinco vías de la parte anterior funcionaba con la razón áurea; la criba de cuatro vías funciona con la raíz cuadrada de dos. Ramanujan construye dos sucesiones auxiliares a partir de los números uno más uno entre la raíz cuadrada de dos, y uno menos esa misma cantidad. La primera suma sus potencias; la segunda las resta. Al sumar se cancelan las partes irracionales: para la segunda potencia, los dos cuadrados suman tres, y para la tercera potencia, cinco. Las sucesiones cumplen reglas de construcción sencillas, de modo que cada valor sale de los anteriores, igual que ocurría con los números de la razón áurea.

$$1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

$$a_2 = 3, \quad a_3 = 5$$

$$a_{m+n} = a_m a_n - a_{m-n} / 2^n$$

$$B_0, B_8, B_{16}, \dots$$

$$B_2, B_{10}, B_{18}, \dots$$

$$B_4, B_{12}, B_{20}, \dots$$

$$B_6, B_{14}, B_{22}, \dots$$

$$-x \cdot \frac{x^3/6}{x^4/24} = -4 = 4B_0 \quad \checkmark$$

CRIBAS DE 2, 3, 4, 5

La criba de cuatro vías

Con ellas escribe cuatro fórmulas, cada una un cociente de dos series que conserva una hebra de números de Bernoulli separados de ocho en ocho por índice: los de índice cero, ocho, dieciséis; luego dos, diez, dieciocho; luego cuatro, doce, veinte; y por último seis, catorce, veintidós. La primera es fácil de probar: para un x diminuto, el segundo miembro es menos x, por x al cubo entre seis, dividido entre x a la cuarta entre veinticuatro, que da menos cuatro, y el primer miembro empieza con cuatro veces el número de Bernoulli de índice cero, menos uno, que también da menos cuatro. Con eso termina el artículo: una sola idea, cancelar términos con raíces de uno o de la unidad imaginaria, ha producido cribas de dos, tres, cuatro y cinco.

El libro imprime después una nota de los editores de los artículos reunidos, y es el lugar adecuado para hacer balance. Primero, pequeñas aclaraciones: Ramanujan numera sus números de Bernoulli de otra manera que la mayoría de los libros, y los números de conteo de sus ecuaciones son los coeficientes binomiales habituales. Su recurrencia rápida vale para índices impares mayores que uno, con tres formas de su último término.

EDITORES

OTRA NUMERACIÓN

c_k binomial

(12): odd $n > 1$

DOS DEDUCCIONES NO VÁLIDAS

CONOCIDOS: VON STAUDT-CLAUSEN, EULER

SI SE DEMUESTRA	SE DEDUCE	CONJETURA
●	●	●
● ?	●	●
●		●

DISTINGUIRLAS

Tres tipos de afirmación

Luego, el veredicto. Dos de sus deducciones, las que convertían en integrales la fórmula del tamaño y la cola de los inversos de los cuadrados, no son válidas tal como están, porque una serie dentro de la integral deja de converger. Sus principales resultados aritméticos ya se conocían: la regla de las partes fraccionarias es el teorema de von

Staudt y Clausen, y la afirmación de imparidad se deduce de él y ya la conocía Euler. De sus ocho afirmaciones aritméticas, indicó demostraciones para tres, la de imparidad, la regla de las partes fraccionarias y la regla de los denominadores iguales; pero esas demostraciones dependen de sus afirmaciones de que ciertas series tienen coeficientes enteros, y esas afirmaciones nunca se demuestran. Otras dos, la afirmación de las potencias de dos y la del cociente primo, se presentan como consecuencias de otras. Y tres, la del numerador primo, la de los factores dos y tres en todo denominador y la regla del denominador, se enuncian meramente como conjeturas.

Así que en este artículo hay tres tipos de afirmación: conjeturas leídas en una tabla, consecuencias que solo son tan seguras como aquello en lo que se apoyan, y demostraciones condicionales que esperan un paso no demostrado. Saber distinguirlas es la habilidad más útil que este artículo puede enseñar. En palabras de los editores, el artículo es interesante como muestra de la primera manera de Ramanujan, antes de que aprendiera a respaldar su intuición con demostraciones. Este curso ha seguido su primer artículo desde la cotangente hasta ese veredicto, y aquí termina.

INTUICIÓN

➤PRUEBA

PRIMERA MANERA

FIN

HEBRAS DE 8 EN 8, DE $1 \pm 1/\sqrt{2}$

CONOCIDOS; PRUEBAS CONDICIONALES

3 CONDICIONALES, 2 SE DEDUCEN, 3 CONJETURAS

De la intuición a la prueba

Para recordar

Las fórmulas de cuatro intervalos usan sucesiones auxiliares construidas con uno más o menos uno entre la raíz cuadrada de dos, y cada una conserva una hebra de números de Bernoulli separados de ocho en ocho; la primera se comprueba con el número de índice cero. Los editores señalan que algunas deducciones no son válidas tal como están escritas, que los resultados principales ya los conocían von Staudt, Clausen y Euler, y que las demostraciones indicadas por Ramanujan descansan en afirmaciones no demostradas sobre coeficientes enteros. De sus ocho afirmaciones aritméticas, tres son conjeturas, dos son consecuencias y tres solo tienen demostraciones condicionales, una clasificación que conviene tener presente siempre que lea usted matemáticas.

Preguntas

1. ¿Qué conserva cada una de las fórmulas de cuatro intervalos?
 - a. Una hebra de números de Bernoulli separados de ocho en ocho por índice
 - b. Todos los números de Bernoulli
 - c. Solo los cuatro primeros números de Bernoulli
 - d. Uno de cada dos números de Bernoulli
2. ¿Por qué no cuentan como completas las demostraciones que indica Ramanujan?

- a. Porque dependen de afirmaciones de que ciertas series tienen coeficientes enteros, que nunca se demuestran
 - b. Porque usan números de Bernoulli equivocados
 - c. Porque son demasiado largas
 - d. Porque nunca se pusieron por escrito
3. ¿Qué tres afirmaciones presenta la nota de los editores como meras conjeturas?
- a. La del numerador primo, la de los factores dos y tres en todo denominador y la regla del denominador
 - b. La de imparidad, la regla de las partes fraccionarias y la regla de los denominadores iguales
 - c. La de las potencias de dos y la del cociente primo
 - d. Las ocho

Respuestas

- 1. a)** Cada una es un cociente de dos series que conserva una hebra de números de Bernoulli separados de ocho en ocho por índice.
- 2. a)** Esas demostraciones dependen de sus afirmaciones de que ciertas series tienen coeficientes enteros, y esas afirmaciones nunca se demuestran.
- 3. a)** Tres, la del numerador primo, la de los factores dos y tres en todo denominador y la regla del denominador, se enuncian meramente como conjeturas.

Ejemplos resueltos

Prueba de la primera fórmula de cuatro intervalos Para un x diminuto, compare el segundo miembro de la primera fórmula de cuatro intervalos, menos x por x al cubo entre seis, dividido entre x a

la cuarta entre veinticuatro, con el primer miembro, cuatro veces el número de Bernoulli de índice cero.

x al cubo entre seis, dividido entre x a la cuarta entre veinticuatro, es veinticuatro entre seis, dividido entre x , es decir, cuatro entre x .

Al multiplicar por menos x se obtiene menos cuatro.

El número de Bernoulli de índice cero es menos uno, así que cuatro veces él también es menos cuatro.

Los dos miembros coinciden.

Respuesta: Ambos miembros valen menos cuatro

Ejercicios

1. Sume los cuadrados de uno más uno entre la raíz cuadrada de dos y de uno menos uno entre la raíz cuadrada de dos.

Pista: Cada cuadrado es uno, más o menos la raíz cuadrada de dos, más un medio.

Respuesta: Tres: la raíz cuadrada de dos con signo más y con signo menos se cancelan, y quedan dos veces uno y medio.

2. Describa con sus propias palabras los tres tipos de afirmación que distinguen los editores, y por qué importa la distinción.

Pista: Piense en una suposición, una consecuencia y un razonamiento al que le falta un paso.

Respuesta: Una conjetura es una suposición a partir de ejemplos; una consecuencia solo es tan segura como la afirmación de la que se deduce; una demostración condicional está completa salvo por un paso no demostrado. Distinguir las le indica cuánto puede fiarse de cada resultado, lo cual importa porque algunas conjeturas de Ramanujan son ciertas y una es falsa.