

Artículos completos de Srinivasa Ramanujan



Srinivasa Ramanujan · 1927

Audiolecciones ilustradas

Lecturized

Artículos completos de Srinivasa Ramanujan

Audiolecciones ilustradas

Srinivasa Ramanujan · 1927

Contado como lecciones ilustradas por Lecturized
lecturized.com

Del original: Collected Papers of Srinivasa Ramanujan, ed. G. H. Hardy, P. V. Seshu
Aiyar and B. M. Wilson (Cambridge, 1927)

Índice

La receta escondida en la cotangente

Tres cuerdas y una tabla de ejemplares

Adivinar las reglas a partir de la tabla

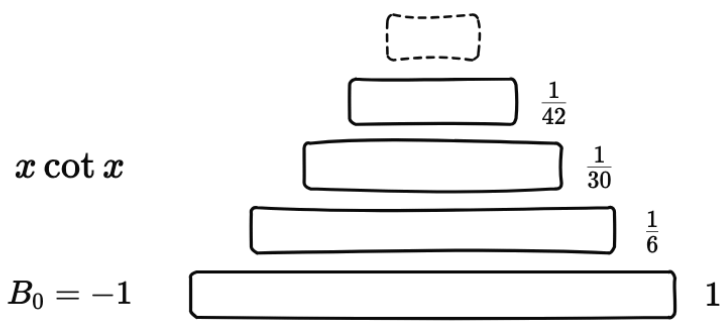
Trabajo de detective, y una demostración en el aire

Medir gigantes desde lejos

Cribas más finas, y un veredicto honesto

La receta escondida en la cotangente

Imagine que encuentra una ficha de receta en la que cada cantidad es una fracción extraña, y sospecha que las fracciones siguen una regla que nadie dejó escrita. Más o menos ahí estaba Ramanujan en 1911, joven oficinista en Madrás, cuando envió su primer artículo al Journal of the Indian Mathematical Society. Las fracciones extrañas son los números de Bernoulli: un sexto, un treintavo, un cuarentaidosavo, y luego otras cada vez mayores. Aparecen siempre que los matemáticos suman potencias, estiman factoriales o estudian los números primos.



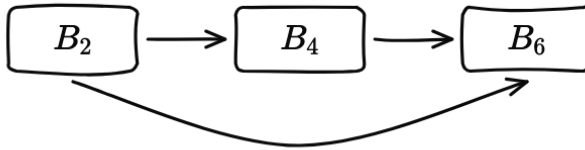
Un plato hecho de capas

Ramanujan se los encuentra en un lugar conocido: la cotangente de la trigonometría escolar, multiplicada por el ángulo. Cerca de cero, esta función puede construirse como una larga suma de piezas cada vez más sencillas, como un plato montado por capas. La cantidad de cada capa la fija un número de Bernoulli. En la manera de escribirlos de Ramanujan todos son positivos, y para que la primera capa siga la misma regla que las demás acuerda llamar menos uno al número cero. Así que la pregunta del artículo es una pregunta de cocinero: si se conoce el plato, ¿cómo se leen las cantidades de cada ingrediente?

Su primera respuesta es escribir el mismo plato de tres maneras distintas, usando tres identidades escolares de la cotangente. Cuando dos descripciones de una misma cosa son iguales, cada capa debe coincidir con la capa correspondiente del otro lado. Hacerlas coincidir una a una da una cadena de ecuaciones, y al resolver la cadena salen los números de Bernoulli por orden: primero un sexto, luego un treintavo, luego un cuarentaidosavo. Funciona, pero es como una receta en la que cada paso nuevo obliga a volver a pesar todos los anteriores: cuanto más avanza, más tiene que cargar, todos los números anteriores en cada paso. Ramanujan, que hacía sus cálculos a mano sobre una pizarra, dice sin rodeos que esto se vuelve tedioso, y se pone a buscar atajos.

$$(x \cot x)^2$$

$$B_2 B_2, \quad B_2 B_4, \quad \dots$$



Igualar capa a capa

El primer atajo multiplica el plato por sí mismo. Hay una regla exacta que dice a qué es igual el cuadrado de esta función, y comparar las capas del cuadrado da una cadena nueva, en la que cada número de Bernoulli sale de productos de parejas anteriores. Llega a los mismos valores por otro camino, un poco como comprobar una suma sumando la columna de abajo arriba en vez de arriba abajo.

El segundo atajo es más astuto. La cotangente tiene una gemela, la cotangente hiperbólica, que se obtiene dando a la misma función un ángulo imaginario. Al sumar las dos se cancela una capa de cada dos, como dos ondas que se anulan entre sí; al restarlas se cancela la otra mitad. Así, cada mitad de la familia puede estudiarse por separado, y las ecuaciones que salen necesitan solo la mitad de números

anteriores que antes. El mismo truco funciona también con la tangente y su gemela hiperbólica.

COT

COTH

+

-

+

-

+

-

SUMA

ANTES

AHORA

TG + TGH

Gemelas que se cancelan

Esta es la costumbre que recorre todo el artículo: encontrar una combinación ingeniosa que haga callar la mayoría de los términos, para que los que quedan puedan hallarse con menos trabajo. Quien diseña una calculadora hace hoy exactamente lo mismo: elige las fórmulas que necesitan menos operaciones para dar las cifras correctas.

Para recordar

Los números de Bernoulli son las cantidades escondidas que construyen la cotangente multiplicada por el ángulo; Ramanujan los toma todos positivos y llama menos uno al número cero. Escribir la misma función de varias maneras e igualar sus capas produce por orden, pero cada uno nuevo necesita todos los anteriores. Elevar la función al cuadrado, o emparejarla con su gemela hiperbólica para que se cancele una capa de cada dos, da cadenas más rápidas que necesitan solo la mitad de números anteriores.

Preguntas

1. ¿Por qué acuerda Ramanujan llamar menos uno al número de Bernoulli cero?
 - a. Porque todos sus números de Bernoulli son negativos
 - b. Para que la primera capa de la serie de la cotangente siga la misma regla que las demás
 - c. Porque la cotangente es negativa cerca de cero
 - d. Para acortar la cadena de ecuaciones
2. ¿Por qué escribir la misma función de maneras distintas da ecuaciones?
 - a. Porque dos descripciones iguales deben coincidir capa a capa
 - b. Porque cada descripción da una respuesta distinta que hay que promediar

- c. Porque solo una descripción es correcta
 - d. Porque la cotangente es un polinomio
3. ¿Qué falla en la primera cadena de ecuaciones?
- a. Da valores erróneos
 - b. Cada paso nuevo necesita todos los números anteriores, así que el trabajo no deja de crecer
 - c. Solo funciona para los tres primeros números
 - d. Necesita un ángulo imaginario
4. ¿Qué se consigue emparejando la cotangente con su gemela hiperbólica?
- a. Se cancela una capa de cada dos, así que cada mitad de la familia necesita solo la mitad de números anteriores
 - b. Todas las capas se vuelven iguales
 - c. Ya no hace falta ningún número anterior
 - d. Las fracciones se convierten en números enteros

Respuestas

- 1. b)** En su manera de escribirlos todos son positivos, y llamar menos uno al número cero mantiene la primera capa en línea con las demás.
- 2. a)** Cuando dos descripciones de una misma cosa son iguales, cada capa debe coincidir con la capa correspondiente del otro lado, y cada coincidencia es una ecuación.
- 3. b)** Cada paso nuevo obliga a volver a pesar todos los anteriores, así que cuanto más se avanza, más hay que cargar.
- 4. a)** Al sumar las dos se cancela una capa de cada dos y al restarlas se cancela la otra mitad, así que cada mitad puede estudiarse por separado con la mitad de números anteriores.

Ejercicios

1. Explique con sus propias palabras por qué cancelar la mitad de los términos hace más rápido hallar los números de Bernoulli.

Pista: Piense en cuántos números anteriores tiene que cargar cada paso nuevo.

Respuesta: En la primera cadena cada número nuevo depende de todos los anteriores, así que el trabajo crece paso a paso. Cuando se cancela la mitad de los términos, cada mitad de la familia depende solo de sus propios miembros, de modo que cada número nuevo necesita solo la mitad de números anteriores, y el trabajo de cada paso se reduce más o menos a la mitad.

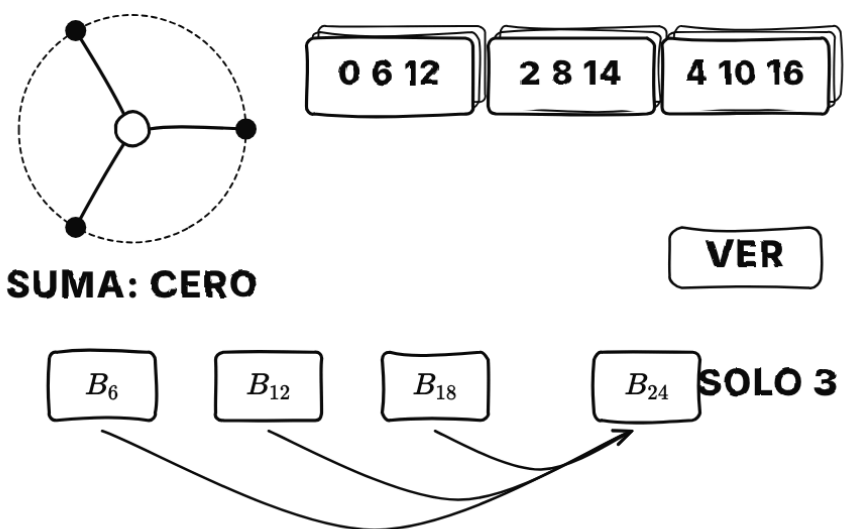
2. ¿Por qué es útil tener un segundo camino, distinto, hacia los mismos valores, como la función elevada al cuadrado?

Pista: Piense en cómo comprueba un contable una suma larga.

Respuesta: Un segundo camino que llega a los mismos valores sirve de comprobación: si ambas vías dan el mismo número, es poco probable un error de cálculo, igual que sumar una columna de abajo arriba y de arriba abajo debe dar el mismo total.

Tres cuerdas y una tabla de ejemplares

Imagine un aro con tres cuerdas atadas, separadas un tercio de vuelta, y tres amigos que tiran de ellas con la misma fuerza. El aro no se mueve: los tres tirones se anulan perfectamente. El siguiente atajo de Ramanujan usa exactamente este tipo de equilibrio, con números en lugar de cuerdas.



Tres cuerdas, tres montones

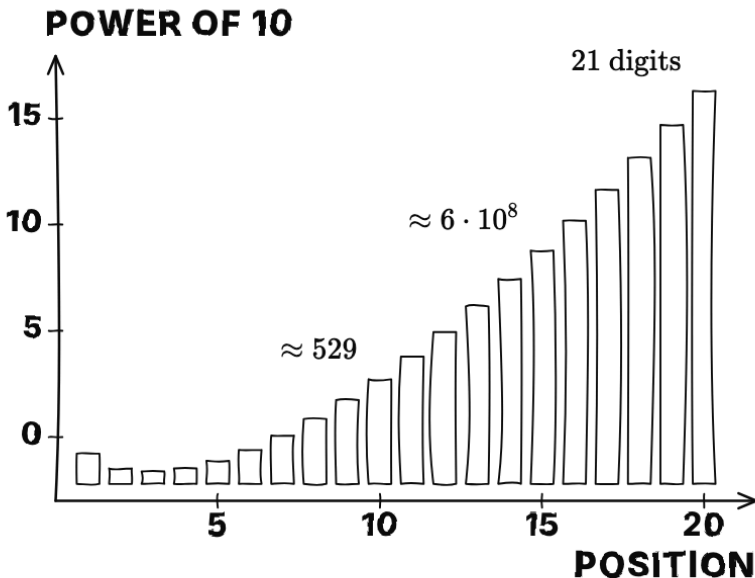
En la parte anterior, emparejar la cotangente con su gemela hiperbólica hacía que se cancelara un término de cada dos. Ahora usa tres compañeras en lugar de dos. Salen de las raíces cúbicas de uno: el

número uno y dos números complejos situados a un tercio de vuelta de él en un círculo, que, como las tres cuerdas, suman nada. Cuando se las da todas a la cotangente y suma los resultados, se cancelan dos términos de cada tres. Lo que sobrevive es una hebra fina de números de Bernoulli, uno de cada seis índices, y desplazando la mezcla obtiene también las otras dos hebras. Es como repartir una baraja en tres montones para poder contar cada montón por separado.

Cada hebra viene con su propia descripción sencilla, y de estas descripciones obtiene una nueva cadena de ecuaciones. En esta cadena cada número de Bernoulli nuevo necesita solo un tercio de los números anteriores que necesitaba el primer método, así que el trabajo a mano se reduce muchísimo. Para obtener el que ocupa el lugar veinticuatro, por ejemplo, le bastan tres anteriores.

También obtiene una segunda relación, bastante distinta, en la que cada número se construye con productos de parejas de números anteriores. No la usa para calcular; la guarda como comprobación. Es la misma costumbre del contable que suma una columna dos veces por caminos distintos, o del programador que prueba una rutina rápida contra otra lenta pero fiable. Si ambos caminos llevan a la misma fracción, es muy improbable un error de cálculo.

Con estas herramientas preparadas, Ramanujan pasa del método a la observación. Explica que quiere descubrir las propiedades de estos números, y que para ello conviene tener delante una buena cantidad de ellos. Así que los calcula uno tras otro y enumera los veinte primeros, una tabla de ejemplares como las que un naturalista clava en una vitrina antes de buscar un patrón.



Amables, luego explosivos

La tabla cuenta una historia muy viva. Los primeros valores son fracciones amables: un sexto, un treintavo, un cuarentaidosavo y de nuevo un treintavo. Luego empiezan a subir, despacio al principio y después de forma explosiva: el décimo ya pasa de quinientos, el decimoquinto ronda los seiscientos millones y el vigésimo tiene un numerador de veintiuna cifras. Mientras tanto, los denominadores de las fracciones siguen siendo bastante pequeños, de miles o decenas de miles, y Ramanujan observa que la sucesión crece sin ningún límite.

Hoy un sistema de álgebra por ordenador imprime esta tabla en un abrir y cerrar de ojos. En 1911 cada entrada era trabajo a mano, y por eso una receta que necesita un tercio de los números anteriores, más una comprobación independiente, marcaba la diferencia entre una

tabla llena de errores y una fiable. Y esta tabla es lo que Ramanujan estudió después, buscando reglas ocultas en los numeradores y los denominadores de estas fracciones.

Para recordar

Las tres raíces cúbicas de uno suman nada, como tres tirones iguales sobre un aro, y mezclarlas en la cotangente cancela dos términos de cada tres. Eso reparte los números de Bernoulli en tres hebras, uno de cada seis índices, y da una cadena que necesita solo un tercio de los números anteriores. Una segunda relación, hecha de productos de parejas, sirve de comprobación independiente de los cálculos. Con estas herramientas Ramanujan calcula una tabla de veinte números de Bernoulli, primero fracciones amables y luego números enormes con denominadores modestos, la materia prima de su búsqueda de patrones.

Preguntas

1. ¿Qué ocurre cuando se dan las tres raíces cúbicas de uno a la cotangente y se suman los resultados?
 - a. Se cancelan dos términos de cada tres y queda una hebra
 - b. Todos los términos se duplican
 - c. La serie se vuelve finita
 - d. Se cancela un término de cada dos

2. ¿Por qué guarda Ramanujan una segunda relación, hecha de productos de parejas, junto a la cadena rápida?
 - a. Porque es más rápida
 - b. Como comprobación: dos caminos distintos hacia la misma fracción hacen muy improbable un error
 - c. Porque la cadena rápida da respuestas erróneas
 - d. Para hallar los denominadores
3. ¿Qué muestra la tabla de veinte valores?
 - a. Los valores disminuyen sin parar
 - b. Primero fracciones amables, luego un crecimiento explosivo, mientras los denominadores siguen siendo pequeños
 - c. Solo números enteros
 - d. Valores que se repiten cada seis lugares

Respuestas

1. **a)** Como tres tirones iguales sobre un aro, los tres números se equilibran, y se cancelan dos términos de cada tres.
2. **b)** No la usa para calcular; la guarda como comprobación, como sumar una columna dos veces por caminos distintos.
3. **b)** Los primeros valores son fracciones amables y luego suben de forma explosiva, mientras los denominadores siguen siendo bastante pequeños.

Ejercicios

1. Explique con una analogía propia por qué repartir los números de Bernoulli en tres hebras ahorra trabajo.

Pista: Piense en separar algo en montones antes de contarlo.

Respuesta: Repartir un gran montón de monedas en tres montones más pequeños permite contar cada uno por separado; del mismo modo, cada hebra de números de Bernoulli puede calcularse a partir de sus pocos miembros anteriores, así que cada número nuevo necesita solo un tercio de los anteriores.

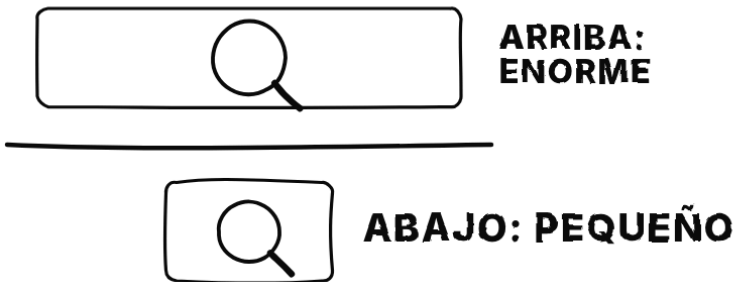
2. ¿Por qué la rapidez de una receta le importaba a Ramanujan en 1911 más de lo que importaría hoy?

Pista: Piense en cómo se calculaban los números entonces y ahora.

Respuesta: Cada entrada se calculaba a mano, y los números crecen deprisa hasta tener muchas cifras, así que cada término extra suponía una aritmética larga y propensa a errores. Hoy un sistema de álgebra por ordenador imprime toda la tabla al instante.

Adivinar las reglas a partir de la tabla

Imagine que ha recogido veinte conchas y empieza a ordenarlas: las estriadas aquí, las de espiral allá, y empieza a sospechar una regla sobre qué formas van con qué colores. Ese es el ambiente del siguiente tramo del artículo. Ramanujan tiene su tabla de veinte números de Bernoulli y empieza a enunciar lo que ve en ellos. Tiene cuidado de decir «se observará», y promete las razones solo más adelante, así que son conjeturas leídas en los ejemplares, no demostraciones.



Las dos mitades de una fracción

Cada número de Bernoulli es una fracción con numerador y denominador, y las dos mitades se comportan de forma muy distinta. Los denominadores son números pequeños y ordenados, mientras que los numeradores crecen muchísimo y parecen aleatorios. Así que Ramanujan estudia las dos mitades por separado, igual que un detective estudia por un lado las huellas de pisadas y por otro las dactilares antes de reconstruir la historia.

Para los denominadores encuentra una regla tan sencilla que podría ser un juego de lápiz y papel. Se toma el índice del número de Bernoulli, se anota todo lo que lo divide, se suma uno a cada divisor, se conservan solo los primos y se multiplican: ese es el denominador de la fracción. Coincide con todas las entradas de su tabla. También observa que el trozo sobrante de cada número, tras quitarle su parte entera, está hecho de esos mismos primos, y que cuando dos números de Bernoulli tienen el mismo denominador, su diferencia o su suma, según la pareja, es siempre un número entero. Estas reglas sobre los denominadores resultan ser completamente ciertas: son un teorema que dos matemáticos, Clausen y von Staudt, habían hallado unos setenta años antes, y que Ramanujan redescubrió solo.

ÍNDICE 24

	1	2	3	4	6	8	12	24
+1 ↓	2	3	~~4~~	5	7	~~9~~	13	~~25~~

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 2730$$

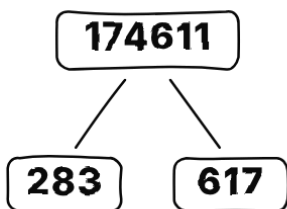


El juego de lápiz y papel

Con los numeradores es más atrevido. Conjetura que, tras un pequeño ajuste, el numerador es siempre un número primo, y que un primo que divide al índice debe aparecer en el numerador o en el denominador, nunca en ninguno de los dos. También ve que ciertas combinaciones de un número de Bernoulli con potencias de dos dan siempre números enteros impares, y que algunas dan números que dejan resto uno al dividirlos entre treinta.

¿ARRIBA PRIMO?

IMPARES



EULER

CONJETURAS

Una conjetura atrevida que falla

Aquí la historia necesita una etiqueta de advertencia. El patrón de los impares es cierto y ya lo conocía Euler, pero la conjetura de que el numerador es siempre primo es sencillamente falsa; falla en el décimo número de su propia tabla. Los editores que reunieron sus artículos tras su muerte lo dicen sin rodeos: varias de estas afirmaciones se enunciaron solo como conjeturas, y las demostraciones que esboza después se apoyan en pasos que nunca demostró.

Esto no es un fracaso; es como suelen avanzar las matemáticas. Alguien observa los datos con atención y anota conjeturas atrevidas; luego otros las ponen a prueba, y cada conjetura acaba siendo un teorema o una lección. Los investigadores de hoy hacen lo mismo con ordenadores: generan tablas enormes de números y buscan patrones,

que luego los expertos intentan demostrar. Ramanujan simplemente lo hizo a mano, a los veintitrés años, con un instinto notable para distinguir qué patrones eran reales.

Para recordar

A partir de su tabla, Ramanujan estudia por separado los numeradores y los denominadores de los números de Bernoulli y enuncia lo que observa. Su regla de los denominadores, construida con los primos que quedan justo uno por encima de los divisores del índice, es completamente cierta, un teorema conocido que él redescubrió. Sus conjeturas sobre los numeradores son más atrevidas: algunas, como el patrón de los impares, son ciertas, pero la afirmación de que el numerador es siempre primo falla, y sus editores incluyen varias de estas afirmaciones como conjeturas, no como hechos demostrados.

Preguntas

1. ¿Por qué las afirmaciones de este tramo del artículo son conjeturas y no demostraciones?
 - a. Porque Ramanujan dice que las observa en la tabla y promete las razones solo más adelante
 - b. Porque los editores eliminaron las demostraciones
 - c. Porque están copiadas de otro libro
 - d. Porque solo se refieren al primer número

2. ¿Qué pasó con su regla de los denominadores de los números de Bernoulli?
 - a. Resultó ser falsa
 - b. Resultó ser completamente cierta, un teorema que Clausen y von Staudt habían hallado antes
 - c. Nunca se comprobó
 - d. Solo funciona para los cinco primeros números
3. ¿Cuál de sus conjeturas sobre los numeradores es falsa?
 - a. Que ciertas combinaciones son enteros impares
 - b. Que el numerador es siempre primo tras un pequeño ajuste
 - c. Que los primos del índice aparecen en el numerador o en el denominador
 - d. Que los números crecen

Respuestas

1. **a)** Tiene cuidado de decir «se observará», y promete las razones solo más adelante, así que son conjeturas leídas en los ejemplares.
2. **b)** Estas reglas sobre los denominadores son completamente ciertas: un teorema que Clausen y von Staudt habían hallado unos setenta años antes, y que Ramanujan redescubrió solo.
3. **b)** El patrón de los impares es cierto y ya lo conocía Euler, pero la conjetura de que el numerador es siempre primo falla en el décimo número de su propia tabla.

Ejercicios

1. Con sus propias palabras, ¿por qué es útil estudiar por separado los numeradores y los denominadores de las fracciones?

Pista: Piense en lo distinto que se comportan las dos mitades en la tabla.

Respuesta: Los denominadores son pequeños y ordenados, mientras que los numeradores son enormes y parecen aleatorios, así que probablemente siguen reglas de tipos distintos. Mirar cada mitad por separado hace visible la regla sencilla de los denominadores, en lugar de esconderla dentro de fracciones que, en conjunto, parecen desordenadas.

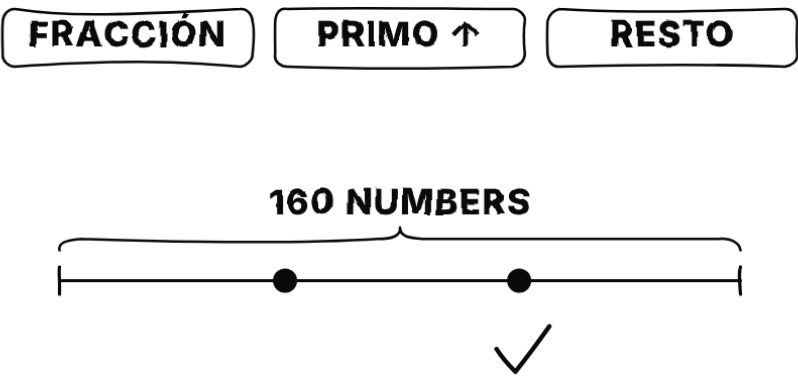
2. Explique por qué una conjetura falsa, como la regla del numerador primo, puede seguir siendo valiosa en matemáticas.

Pista: Piense en lo que ocurre después de que una conjetura queda por escrito.

Respuesta: Una conjetura enunciada puede ponerse a prueba. Si falla, el contraejemplo muestra exactamente dónde se equivocó la intuición e impide que otros construyan sobre ella; si se cumple, alguien la demuestra. En ambos casos la conjetura hace avanzar la materia, como ocurrió con la tabla de Ramanujan.

Trabajo de detective, y una demostración en el aire

Imagine un detective que solo sabe que el sospechoso tiene entre treinta y cuarenta años, es zurdo y tiene un coche rojo. Cada pista por separado deja a mucha gente; juntas dejan a dos o tres. En este tramo del artículo Ramanujan se convierte en ese detective, y su sospechoso es un número de Bernoulli.



Los dos sospechosos del detective

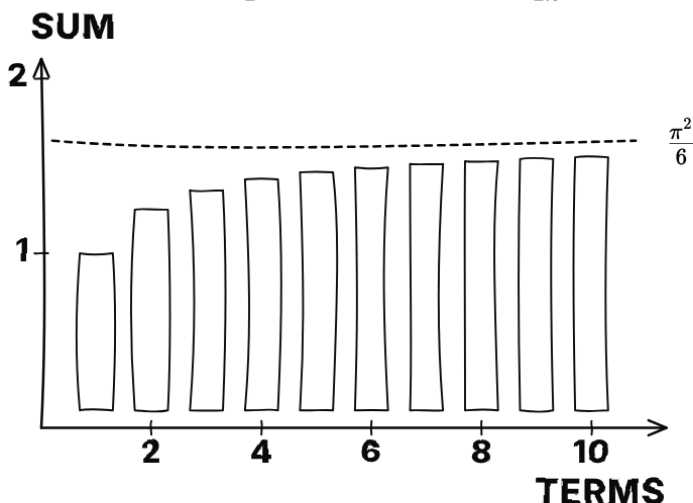
Su caso es el número de Bernoulli que ocupa el undécimo lugar de su tabla. Finge conocer solo unos límites aproximados de su tamaño, un

intervalo de ciento sesenta números enteros. Luego aporta sus pistas. La fracción que sobra tras la parte entera la fijan los primos del denominador, así que esa parte se conoce exactamente. Un primo que divide al índice pero falta en el denominador debe dividir al numerador de la fracción. Y una regla sobre los restos al dividir entre cinco descarta la mayor parte de lo que queda. Solo sobreviven dos candidatos.

Para elegir entre ellos usa una pista más: su conjetura de que el numerador, tras dividirlo entre ese primo, es también primo. Un candidato no pasa esa prueba, así que se queda con el otro, y es en efecto el valor de su tabla. Pero la pista que usó para decidir no es fiable: para el número que eligió, el numerador tampoco es primo tras la división. Llegó al sospechoso correcto, en parte por suerte, con un testigo poco fiable.

¿De dónde salen, para empezar, los límites aproximados? Aquí toma prestado un puente clásico. Hay una suma famosa: sume uno entre cada número entero al cuadrado, o al cubo, o elevado a cualquier potencia par, y obtendrá un número determinado; para los cuadrados es π al cuadrado dividido entre seis. El puente dice que cada número de Bernoulli es igual a un factorial dividido entre una potencia de dos π , multiplicado por una de estas sumas. Para índices grandes la suma es apenas mayor que uno, así que el tamaño de un número de Bernoulli es, en esencia, un factorial frente a una potencia de dos π , lo que explica por qué la tabla se dispara. La misma suma puede escribirse también como un producto con un factor por cada primo, un indicio de que los primos están entretejidos en estos números desde el principio.

$$\log n! \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - n + \dots + \frac{B_2}{2n} - \dots$$

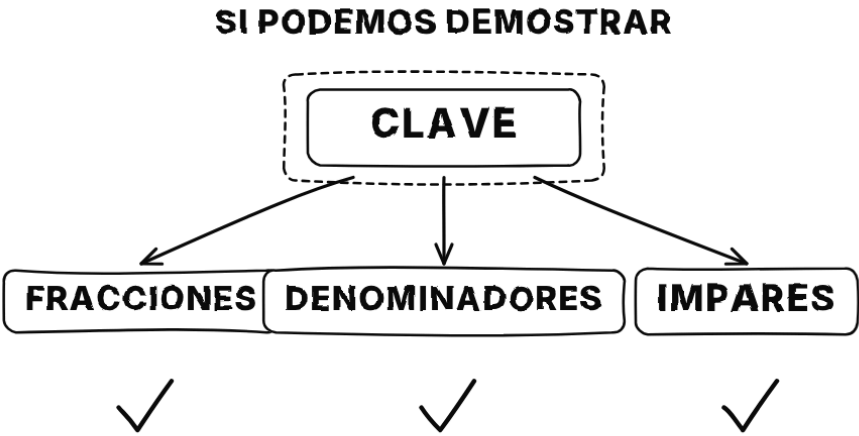


Una suma que se estabiliza

Ramanujan convierte además el puente en fórmulas integrales, áreas bajo curvas, que permiten calcular el tamaño de otras maneras. Y lo introduce en una receta conocida para el logaritmo de un factorial, cuyos términos de corrección vuelven a ser números de Bernoulli. Con una receta así puede estimarse la parte entera de cualquier número de Bernoulli, y la fracción sobrante sale de la regla de los primos, así que el valor exacto queda determinado. La pega, que él reconoce abiertamente, es que esto exige logaritmos con más decimales de los que ofrecían las tablas impresas de su época, y promete una manera de sortearla más adelante.

Luego se propone demostrar sus propios patrones, y la estrategia es elegante. Reúne varias sumas infinitas, construidas con los mismos

inversos de cuadrados y con un término por cada primo, y afirma que cierta combinación de ellas puede reescribirse usando solo números enteros como coeficientes. Si esa única afirmación fuera cierta, sus reglas sobre las fracciones sobrantes y los denominadores iguales se seguirían de inmediato, y dos afirmaciones parecidas darían sus patrones de los impares. Es como reducir toda una serie de juicios a una única prueba clave: demuéstrela, y todo lo demás se sigue. Los primeros coeficientes que puede comprobar a mano salen, en efecto, enteros, lo cual es alentador.



DEMOSTRADO POR OTROS

Una única prueba clave

Pero la prueba clave nunca se presenta. Cada argumento termina con las palabras «si podemos demostrar», y nunca lo hace. Los editores de sus artículos reunidos señalan que estas afirmaciones siguen sin

demostrar y que algunos pasos usan sumas que no se estabilizan en un valor, así que los argumentos son esbozos. Las reglas a las que apuntaba son ciertas de todos modos: ya las habían demostrado antes Clausen y von Staudt, y Euler.

Para quien aprende, esta es una lección valiosa sobre cómo leer matemáticas. Una respuesta correcta no es lo mismo que un argumento correcto, y un plan prometedor todavía no es una demostración. Ramanujan, a los veintitrés años, ya era magnífico encontrando los enunciados correctos; la demostración rigurosa la desarrollaría después, trabajando con Hardy en Cambridge.

Para recordar

Unos límites aproximados de un número de Bernoulli, combinados con pistas exactas sobre su fracción sobrante y los primos de su numerador, reducen los candidatos a dos; Ramanujan elige el correcto, pero con una pista que es falsa. Un puente clásico une cada número de Bernoulli a un factorial, una potencia de dos pi y una suma sobre todos los números enteros, lo que explica su crecimiento explosivo y da su tamaño a partir de logaritmos precisos. Su plan de demostración reduce sus patrones a una afirmación sobre coeficientes enteros, afirmación que nunca demuestra, aunque los patrones en sí son teoremas ciertos hallados antes por otros.

Preguntas

1. ¿Por qué varias pistas juntas reducen los candidatos mucho más que cualquier pista sola?
 - a. Cada pista descarta la mayor parte de lo que dejan las demás, así que solo sobreviven dos candidatos
 - b. Porque una pista basta siempre
 - c. Porque las pistas se repiten entre sí
 - d. Porque el intervalo ya era diminuto al principio
2. ¿Qué falla en la última pista que usa Ramanujan para elegir entre los dos candidatos?
 - a. Se apoya en su conjetura de que el numerador dividido entre el primo es primo, que es falsa para el número elegido
 - b. Elige el número equivocado
 - c. Ignora la fracción sobrante
 - d. Necesita una calculadora
3. ¿Por qué crecen de forma tan explosiva los números de Bernoulli, según el puente clásico?
 - a. Cada uno es, en esencia, un factorial frente a una potencia de dos π
 - b. Sus denominadores disminuyen
 - c. Se duplican en cada paso
 - d. Son cuadrados de primos
4. ¿En qué situación queda el plan de demostración de Ramanujan?
 - a. Lo reduce todo a una afirmación sobre coeficientes enteros que nunca demuestra
 - b. Es una demostración completa

c. Fue refutado

d. Demuestra la conjetura del numerador primo

Respuestas

1. **a)** Como las pistas de un detective, cada una por separado deja muchas posibilidades, pero juntas, la fracción sobrante, el primo del numerador y la regla de restos dejan solo dos.
2. **a)** La pista no es fiable: para el número que eligió, el numerador tampoco es primo tras la división, aunque el número sí es el correcto.
3. **a)** Para índices grandes la suma es apenas mayor que uno, así que el tamaño es, en esencia, un factorial frente a una potencia de dos pi.
4. **a)** Cada argumento termina con «si podemos demostrar», y la prueba clave nunca se presenta; los editores lo señalan.

Ejercicios

1. Explique con sus propias palabras por qué una respuesta correcta no garantiza un argumento correcto, usando la elección de Ramanujan del undécimo número de Bernoulli.

Pista: Piense en la pista que usó para decidir.

Respuesta: Eligió el valor correcto, pero la razón que dio, que el numerador dividido entre once es primo, es falsa precisamente para ese número. Así que la respuesta fue correcta en parte por suerte; un argumento solo es correcto si todos sus pasos son ciertos.

2. ¿Por qué es útil que la suma sobre todos los números enteros pueda escribirse también con un factor por cada primo?

Pista: Piense en lo que los números de Bernoulli parecen saber de los primos.

Respuesta: Muestra que los primos están incorporados en los números de Bernoulli desde el principio, lo que ayuda a explicar por qué sus denominadores y sus partes fraccionarias están gobernados por primos, y relaciona estos números con el estudio de los números primos.

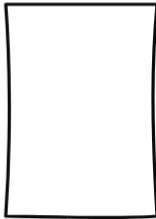
Medir gigantes desde lejos

Los astrónomos pueden decirle a qué distancia está una estrella y cuánto brilla en realidad sin viajar nunca hasta ella. Ramanujan hace algo parecido con números de Bernoulli demasiado grandes para escribirlos: los mide a distancia.

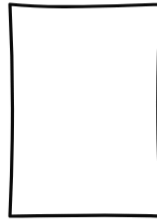
$$B_n \approx \frac{2 n!}{(2\pi)^n}$$

LOG → N.º DE CIFRAS

TABLA: 529,12



RECETA: 529,12



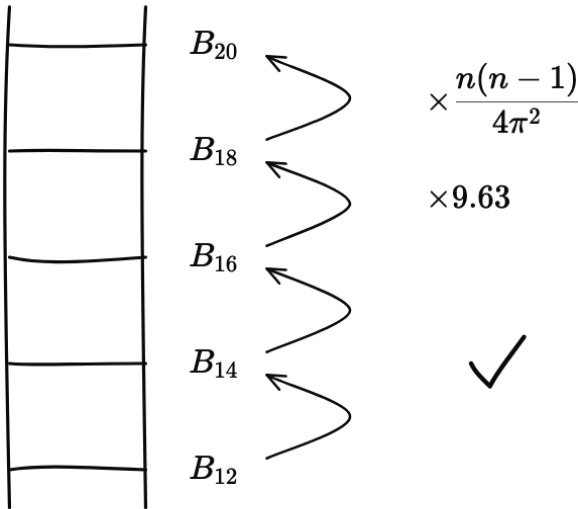
Medido desde lejos

Su primer instrumento es una fórmula para el número de cifras. Nace del puente que vimos antes, que une cada número de Bernoulli a un factorial y a una potencia de dos pi. Tomando logaritmos, la herramienta para medir el tamaño de números enormes, convierte

ese puente en una receta corta que solo necesita el índice y dos constantes fijas. Con ella puede decir cuántas cifras tiene un número de Bernoulli y cuáles son sus primeras cifras, e incluso indica cuánto vale el pequeño error de la receta. Para el décimo número de su tabla, la receta cae casi exactamente sobre el valor verdadero, unos quinientos veintinueve.

Su segundo instrumento compara vecinos. Resulta que cada número de Bernoulli es casi exactamente el que está dos lugares antes, multiplicado por un factor sencillo construido con el índice y π . La aproximación se vuelve excelente muy deprisa a medida que los números crecen. Esto da una escalera: desde un peldaño puede estimarse el siguiente lo bastante bien como para saber entre qué dos números enteros está. Y como la fracción sobrante ya se conoce por la regla de los primos, conocer esos dos números enteros basta para escribir el valor exacto. Ramanujan sube así los diez primeros peldaños, y todos los valores coinciden con su tabla.

ENTERA + FRACCIÓN



Una escalera de vecinos

Luego presume con un gigante, el número de Bernoulli de índice cuatrocientos cuarenta y cuatro. Su fracción sobrante sale de la regla de los primos, con un denominador de unos noventa millones. Su receta de las cifras dice que su parte entera tiene seiscientas treinta y una cifras y le da las cuatro primeras; sumando el tamaño del denominador, el numerador completo de la fracción tiene seiscientas treinta y nueve cifras, y de nuevo sabe cómo empieza. Con sus reglas de restos llega incluso a averiguar cómo terminan la parte entera y el numerador. El software moderno confirma estas cifras, aunque un paso de su razonamiento se apoya en su poco fiable conjetura de los primos.

$$B_{444}$$

ENTERA: 631 CIFRAS, 1751...

ARRIBA: 639 CIFRAS, 1588...

...657

ABAJO: 90709710

TAMBIÉN: TG, COSEC

TAMAÑO CON LOGARITMOS

$$\frac{B_n}{B_{n-2}} \approx \frac{n(n-1)}{4\pi^2}$$

Un gigante: la B de índice 444

Por último, señala que todo lo que construyó sobre la cotangente puede reconstruirse sobre la tangente o la cosecante, otras dos funciones de la trigonometría escolar. Eso produce más identidades que relacionan números de Bernoulli separados varios lugares, ahora con potencias de dos mezcladas, y amplía su caja de atajos.

Para recordar

Con logaritmos, Ramanujan convierte el puente hacia los factoriales en una receta para el número de cifras y las primeras cifras de cualquier número de Bernoulli. Cada número de Bernoulli es casi exactamente el que está dos lugares antes por un factor sencillo, así que puede subir por la tabla y fijar los valores exactos con la regla de los primos. Describe el número de índice cuatrocientos cuarenta y cuatro, su longitud, sus primeras y últimas cifras, sin escribirlo, y extiende sus identidades a la tangente y a la cosecante.

Preguntas

1. ¿Qué le permite hacer a Ramanujan su receta de las cifras?
 - a. Decir cuántas cifras tiene un número de Bernoulli y cuáles son sus primeras cifras, solo a partir del índice
 - b. Hallar el numerador exacto de cualquier número de Bernoulli
 - c. Demostrar que los numeradores son primos
 - d. Calcular π
2. ¿Por qué basta saber entre qué dos números enteros está un número de Bernoulli para obtener su valor exacto?
 - a. Porque la fracción sobrante ya se conoce por la regla de los primos
 - b. Porque los números de Bernoulli son enteros

- c. Porque los dos números son siempre iguales
 - d. Porque la escalera es exacta
3. ¿Qué amplía al final de este tramo?
- a. Sus identidades, reconstruidas sobre la tangente y la cosecante
 - b. Su tabla, hasta cien números
 - c. Su demostración de la conjetura de los primos
 - d. Su receta de las cifras, a los índices impares

Respuestas

1. **a)** Con ella puede decir cuántas cifras tiene un número de Bernoulli y cuáles son sus primeras cifras.
2. **a)** Como la fracción sobrante ya se conoce por la regla de los primos, conocer esos dos números enteros basta para escribir el valor exacto.
3. **a)** Señala que todo lo construido sobre la cotangente puede reconstruirse sobre la tangente o la cosecante, lo que produce más identidades.

Ejercicios

1. Explique con una analogía propia cómo puede describirse un número con detalle sin escribirlo.

Pista: Piense en medir algo que no puede alcanzar.

Respuesta: Como estimar la altura de una montaña por su sombra, se pueden conocer el tamaño, las primeras cifras y las últimas cifras de un número por indicios indirectos: un logaritmo da su longitud y sus primeras cifras, y las reglas de divisibilidad dicen cómo termina, sin escribir nunca todas sus cifras.

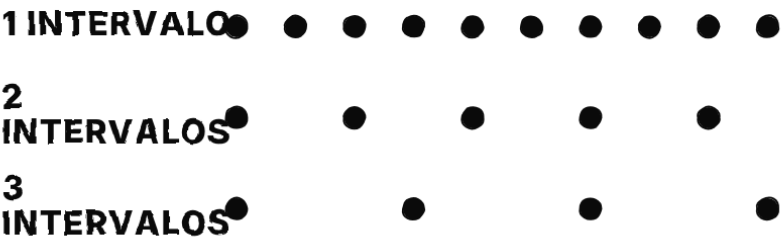
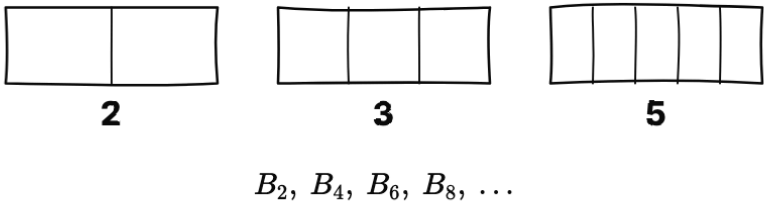
2. ¿Por qué la escalera de vecinos funciona mejor para los números de Bernoulli grandes que para los pequeños?

Pista: Piense en los factores de corrección.

Respuesta: El factor entre vecinos solo es aproximadamente correcto, y la corrección se vuelve diminuta a medida que los números crecen, así que para índices grandes la estimación es lo bastante precisa como para acertar siempre la pareja de números enteros correcta.

Cribas más finas, y un veredicto honesto

Si alguna vez ha separado monedas con un juego de cribas, conoce la idea: una criba gruesa divide el montón en dos, una más fina en tres, y así sucesivamente, hasta que cada bandeja contiene monedas de un solo tipo. El artículo de Ramanujan ha estado haciendo exactamente esto con los números de Bernoulli. En sus últimas secciones le pone nombre al método y muestra hasta dónde llega.



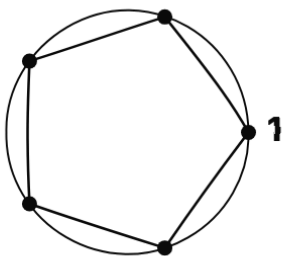
$$\omega^p = 1 \text{ (or } \omega^p = i) \longrightarrow \cot$$

Cribas de todos los tamaños

Llama a sus resultados anteriores fórmulas de un intervalo, de dos intervalos y de tres intervalos, según lo separados que estén los números de Bernoulli que sobreviven en cada hebra. La receta general es breve: para obtener una fórmula de p intervalos, se toman los números cuya potencia p -ésima es uno, o cuya potencia p -ésima es la unidad imaginaria cuando p es par, y se mezclan en la cotangente. Entonces se cancelan la mayoría de los términos, y cada hebra conserva solo números de Bernoulli cada vez más separados, así que cada uno nuevo depende de menos números anteriores.

Para mostrar la receta en acción, desarrolla el caso de cinco intervalos. Las cinco raíces quintas de uno ocupan los vértices de un pentágono regular, y el pentágono trae consigo la razón áurea, el número de aproximadamente uno coma seiscientos dieciocho famoso por los girasoles, las conchas y los números de Fibonacci. Sus fórmulas usan una sucesión de números enteros construida con la razón áurea, primos cercanos de los números de Fibonacci, y cada fórmula conserva solo un número de Bernoulli de cada diez índices. Después esboza el caso de cuatro intervalos, construido esta vez con la raíz cuadrada de dos, y observa que el mismo truco con cosenos da muchas otras identidades. Para nosotros la lección es el método: una sola idea, cancelar términos con raíces de uno, genera toda una familia de atajos, igual que un buen truco en un programa de ordenador puede acelerar muchos cálculos distintos.

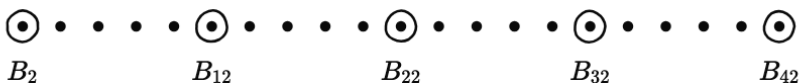
CINCO INTERVALOS



$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

1, 3, 4, 7, 11, ...

four-interval: $\sqrt{2}$



UN TRUCO, MUCHOS ATAJOS

El pentágono y phi

El libro cierra el artículo con una nota de los editores de los artículos reunidos de Ramanujan, escrita tras su muerte. Es un veredicto respetuoso pero franco. El artículo, dicen, es interesante como muestra de la primera manera de Ramanujan, pero sus resultados principales ya se conocían y sus demostraciones son incompletas. Su regla de las fracciones sobrantes es el teorema de Clausen y von Staudt, y su patrón de los impares ya lo conocía Euler.

EDITORES

CONOCIDOS; PRUEBAS INCOMPLETAS

CLAUSEN-VON STAUDT, EULER

		CONJETURA
ESBOZO	● ● ● ?	● ✓ REGLA DEN.
SE SIGUE	● ●	● ✗ PRIMOS ↑
		●

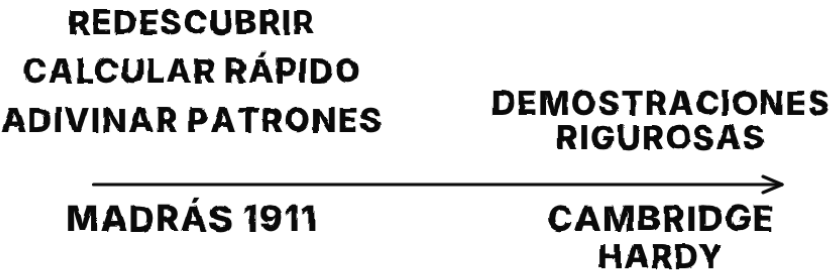
ALGUNAS SUMAS DIVERGEN

El veredicto de los editores

También clasifican sus ocho afirmaciones aritméticas según su situación, que es exactamente la distinción que este curso ha intentado mantener. Para tres de ellas indicó demostraciones, pero esas demostraciones se apoyan en afirmaciones sobre coeficientes enteros que nunca demostró. Otras dos las presentó como consecuencias de otras. Y tres, entre ellas la afirmación de que los numeradores de las fracciones son primos y su regla de los denominadores, las enunció solo como conjeturas; la regla de los denominadores es de hecho cierta, mientras que la afirmación de los primos es falsa. Los editores añaden que algunas de sus deducciones usan sumas infinitas que no se estabilizan en un valor, así que esos argumentos no funcionan tal como están escritos.

¿Por qué leer hoy un artículo así? Porque es una rara mirada a una gran mente antes de formarse: un joven que trabajaba solo en Madrás, redescubriendo un teorema famoso, inventando maneras rápidas de calcular y adivinando patrones a partir de datos con un instinto seguro para los que importan. En pocos años, trabajando con Hardy en Cambridge, Ramanujan aprendió a respaldar sus intuiciones con demostraciones rigurosas, y su obra posterior transformó partes de la teoría de números. Este curso ha seguido su primer artículo publicado desde la cotangente hasta el veredicto de los editores, y termina aquí.

¿POR QUÉ LEERLO?



RAÍCES DE UNO → HEBRAS MÁS FINAS
CONOCIDOS; PRUEBAS INCOMPLETAS
DENOMINADORES ✓ ARRIBA PRIMOS ×

Para recordar

Ramanujan llama a su método fórmulas por intervalos y muestra la receta general: raíces de uno mezcladas en la cotangente reparten los números de Bernoulli en hebras cada vez más finas, y la razón áurea aparece en el caso de cinco intervalos. La nota final de los editores dice que los resultados principales del artículo ya se conocían y que sus demostraciones son incompletas, y separa sus afirmaciones en demostraciones apoyadas en afirmaciones no demostradas, consecuencias y meras conjeturas. Algunas conjeturas son ciertas, como la regla de los denominadores, y una es falsa, la de los numeradores primos; el artículo sigue siendo un retrato vivo de la primera manera de trabajar de Ramanujan.

Preguntas

1. ¿Cuál es la receta general para una fórmula de p intervalos?
 - a. Mezclar en la cotangente los números cuya potencia p -ésima es uno, o la unidad imaginaria cuando p es par
 - b. Multiplicar la cotangente por p
 - c. Usar los p primeros primos
 - d. Dividir la tabla en p partes
2. ¿Qué trae el pentágono de las raíces quintas a las fórmulas de cinco intervalos?
 - a. La razón áurea

- b. El número e
 - c. La raíz cuadrada de dos
 - d. Solo el número π
3. ¿Cómo clasifican los editores las ocho afirmaciones aritméticas de Ramanujan?
- a. Tres con demostraciones indicadas que se apoyan en afirmaciones no demostradas, dos consecuencias y tres conjeturas
 - b. Las ocho completamente demostradas
 - c. Las ocho falsas
 - d. Cuatro demostradas y cuatro falsas

Respuestas

1. **a)** Para obtener una fórmula de p intervalos, se toman los números cuya potencia p -ésima es uno, o cuya potencia p -ésima es la unidad imaginaria cuando p es par, y se mezclan en la cotangente.
2. **a)** Las cinco raíces quintas de uno ocupan los vértices de un pentágono regular, y el pentágono trae consigo la razón áurea.
3. **a)** Para tres indicó demostraciones que se apoyan en afirmaciones no demostradas, dos las presentó como consecuencias, y tres las enunció solo como conjeturas.

Ejercicios

1. Con sus propias palabras, explique por qué cribas más finas suponen menos trabajo para cada número de Bernoulli nuevo.

Pista: Piense en cuántos números anteriores hay en la misma hebra.

Respuesta: Una criba más fina reparte los números de Bernoulli en más hebras, cada una con miembros más separados. Cada número nuevo se calcula solo a partir de los miembros anteriores de su propia hebra, así que, cuanto más fina es la criba, menos números anteriores necesita cada paso.

2. Explique la diferencia entre una conjetura, una consecuencia y una demostración que se apoya en una afirmación no demostrada, usando la nota de los editores.

Pista: Piense en lo que todavía necesita cada una.

Respuesta: Una conjetura es una suposición enunciada sin demostración; una consecuencia se sigue de otra afirmación, así que solo es tan segura como esa afirmación; una demostración que se apoya en una afirmación no demostrada está completa salvo por esa afirmación. Los editores usan estas categorías para mostrar que ninguna de las ocho afirmaciones de Ramanujan queda completamente demostrada en el artículo, aunque varias son teoremas ciertos.