

Artículos completos de Srinivasa Ramanujan



Srinivasa Ramanujan · 1927

Audiolecciones ilustradas

Lecturized

Artículos completos de Srinivasa Ramanujan

Audiolecciones ilustradas

Srinivasa Ramanujan · 1927

Contado como lecciones ilustradas por Lecturized
lecturized.com

Del original: Collected Papers of Srinivasa Ramanujan, ed. G. H. Hardy, P. V. Seshu
Aiyar and B. M. Wilson (Cambridge, 1927)

Índice

Dónde viven los números de Bernoulli

Aún más rápido, y la primera tabla

Leer leyes en los ejemplares

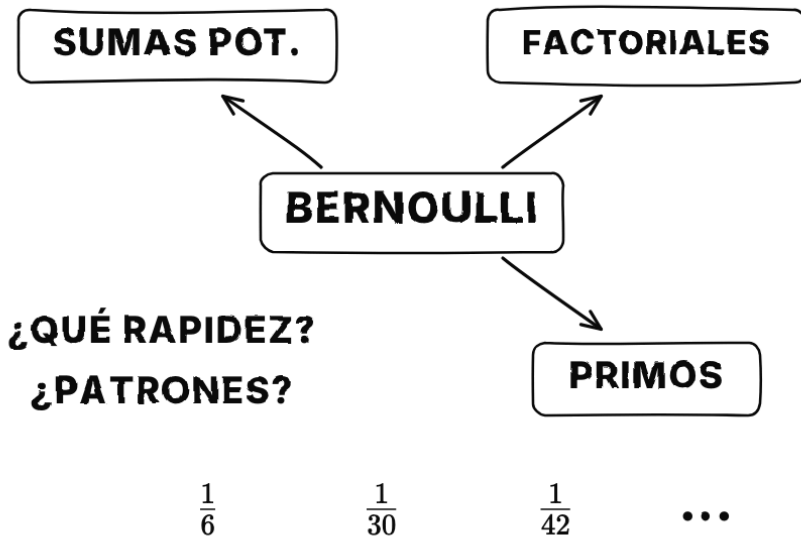
Del tamaño aproximado al valor exacto, y demostraciones pendientes

Cuánto mide, y en qué termina

El patrón general, y lo que dijeron los editores

Dónde viven los números de Bernoulli

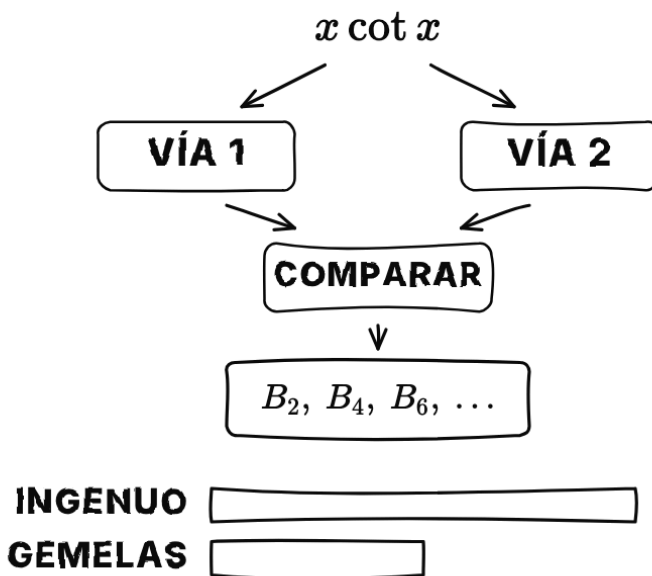
Hay números que aparecen por todas partes en las matemáticas, y los números de Bernoulli están entre los más insistentes. Aparecen cuando se suman los cuadrados o los cubos de los números enteros, cuando se estiman factoriales enormes y cuando se estudian los números primos. Los primeros son fracciones amables, un sexto, un treintavo, un cuarentaidosavo, pero pronto se vuelven salvajes, con numeradores de decenas de cifras. En 1911 un joven oficinista de Madrás, Ramanujan, publicó sobre ellos su primerísimo artículo, y este curso lo sigue.



Dónde aparecen

El artículo plantea dos preguntas. ¿Cómo pueden calcularse estos números con el menor esfuerzo posible? ¿Y qué regularidades ocultas cumplen, en sus numeradores, en sus denominadores y en su tamaño? Las primeras secciones tratan la primera pregunta, y toda la respuesta descansa en una idea: una sola función conocida los contiene a todos.

Esa función es la cotangente de la trigonometría escolar, multiplicada por el ángulo. Escrita cerca de cero como una larga suma de potencias, sus términos sucesivos llevan los números de Bernoulli uno tras otro; Ramanujan los toma todos positivos y llama menos uno al número cero para que el primer término encaje. Si se puede describir esta función de dos maneras distintas, las dos descripciones deben coincidir término a término, y cada coincidencia es una ecuación que da el siguiente número de Bernoulli. Ese es el motor del artículo: escribir lo mismo dos veces, comparar y leer los números.



Escribir dos veces, comparar

Usado de forma ingenua, el motor es lento. Las primeras ecuaciones que obtiene necesitan todos los números de Bernoulli anteriores para producir el siguiente, así que el trabajo crece sin parar a medida que se avanza. Su mejora consiste en combinar la cotangente con una versión gemela de sí misma, de modo que se cancele un término de cada dos y cada mitad de la familia pueda tratarse por separado. Las nuevas ecuaciones necesitan solo la mitad de números anteriores, y la siguiente parte del curso lleva el mismo truco más lejos.

¿Por qué importa esto más allá de 1911? Elegir la combinación que cancela la mayor parte del trabajo es el mismo instinto que hay detrás de las fórmulas rápidas de una calculadora o de un sistema de álgebra por ordenador, que hoy calculan estos números en una fracción de

segundo. Y los valores que Ramanujan obtuvo así son los que lo llevaron a los patrones de las secciones posteriores, algunos de los cuales resultaron ciertos y famosos, y otros no resistieron la comprobación. Quedan fuera aquí las ecuaciones concretas, las tres maneras de escribir la cotangente, la relación de la serie al cuadrado y los detalles de la función gemela; están en las tres primeras secciones del artículo.

Para recordar

Los números de Bernoulli son fracciones especiales que aparecen en todas las matemáticas, y todos viven dentro de la cotangente multiplicada por el ángulo. El método de Ramanujan consiste en describir esa función de dos maneras y compararlas término a término, lo que entrega los números uno a uno. La comparación simple necesita todos los números anteriores en cada paso; emparejar la cotangente con su gemela, para que se cancele la mitad de los términos, reduce ese trabajo a la mitad. Esta búsqueda de atajos, y los valores que produjo, preparan los patrones de los que trata el resto del artículo.

Preguntas

1. ¿En qué idea única descansan las primeras secciones del artículo?
 - a. En que los números de Bernoulli son todos primos

- b. En que una función conocida, la cotangente multiplicada por el ángulo, contiene todos los números de Bernoulli
 - c. En que los números de Bernoulli pueden adivinarse a partir de una tabla
 - d. En que hace falta un ordenador para hallarlos
2. ¿Por qué describir la función de dos maneras produce los números?
- a. Porque las dos descripciones deben coincidir término a término, y cada coincidencia es una ecuación
 - b. Porque las dos descripciones dan dos números distintos que hay que promediar
 - c. Porque una descripción siempre es más sencilla
 - d. Porque la cotangente se repite
3. ¿Qué se consigue emparejando la cotangente con su versión gemela?
- a. Todos los números se vuelven enteros
 - b. Se cancela un término de cada dos, de modo que cada mitad de la familia puede tratarse con menos números anteriores
 - c. Se duplica el trabajo pero mejora la precisión
 - d. Se demuestran todos los patrones de las secciones posteriores

Respuestas

1. **b)** Toda la respuesta descansa en una idea: una sola función conocida, la cotangente multiplicada por el ángulo, los contiene a todos.
2. **a)** Si se describe la función de dos maneras, las descripciones deben coincidir término a término, y cada coincidencia es una ecuación que da el

siguiente número.

3. b) Combinar la cotangente con su gemela cancela un término de cada dos, y las nuevas ecuaciones necesitan solo la mitad de números anteriores.

Ejercicios

1. Explique con sus propias palabras por qué escribir lo mismo dos veces y comparar puede dar información nueva.

Pista: Piense en dos descripciones de un mismo objeto que deben coincidir en cada detalle.

Respuesta: Si dos expresiones describen la misma función, cada pieza de una debe ser igual a la pieza correspondiente de la otra. Cada coincidencia así es una ecuación, y cuando un lado contiene un número de Bernoulli desconocido mientras el otro contiene solo cantidades conocidas, la ecuación da el desconocido. Repitiendo esto, los números salen uno a uno.

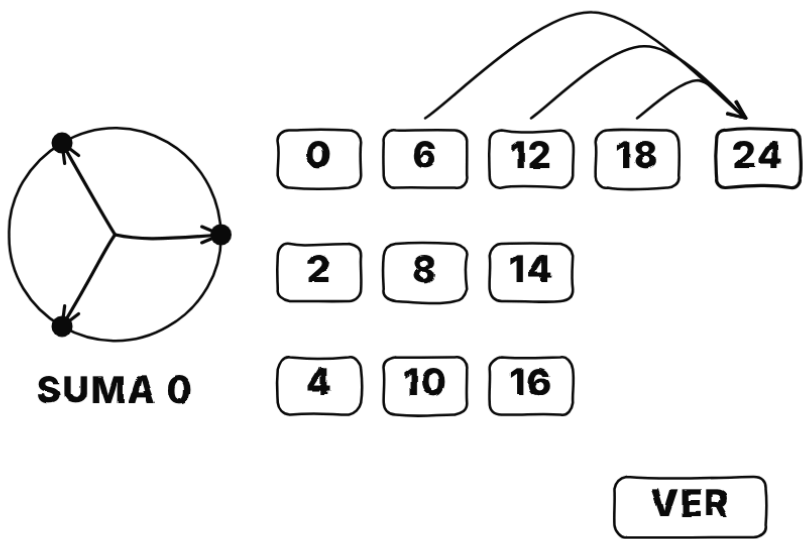
2. ¿Por qué le importaría a Ramanujan necesitar menos números anteriores para hallar el siguiente?

Pista: Recuerde que trabajaba a mano y que los números crecen deprisa.

Respuesta: Cada número anterior tiene que entrar en el cálculo, y pronto los números tienen numeradores largos, así que cada término cuesta trabajo real a mano. Reducir a la mitad los términos necesarios reduce a la mitad ese trabajo y la probabilidad de un error de cálculo, lo que importa cuando se quieren valores muy avanzados de la sucesión.

Aún más rápido, y la primera tabla

En la parte anterior, Ramanujan emparejó la cotangente con una gemela para que se cancelara la mitad de sus términos. Ahora se hace la siguiente pregunta natural: si dos compañeras cancelan la mitad de los términos, ¿podrían tres compañeras cancelar todavía más? La respuesta es sí, y le da una receta aún más rápida, además de una manera ya hecha de comprobar sus propios cálculos.



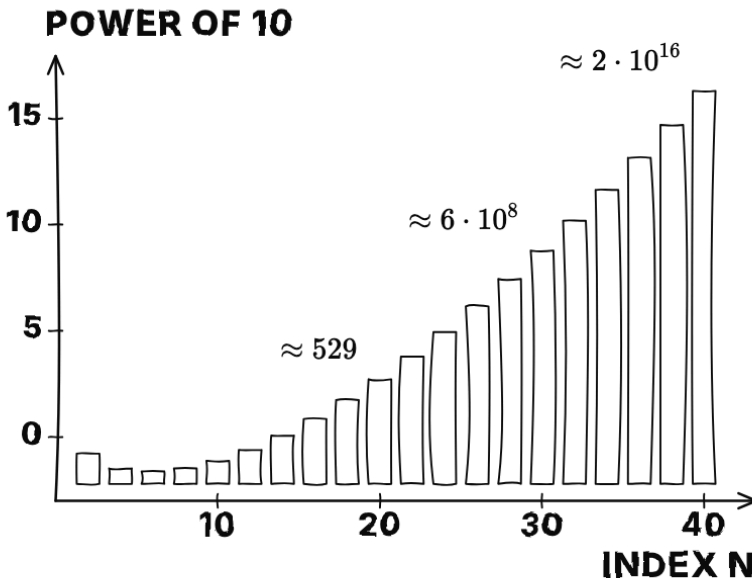
Tres compañeras, un tercio del trabajo

Las tres compañeras salen de las raíces cúbicas de uno: el propio uno y dos números complejos situados a un tercio de vuelta entre sí en un

círculo. Como tres tirones iguales sobre un aro con ángulos iguales, estos tres números suman cero. Dárselos todos a la cotangente y sumar los resultados hace que se cancelen dos términos de cada tres. Lo que queda es una hebra de números de Bernoulli separados seis lugares, y desplazando la mezcla obtiene las tres hebras, cada una descrita por un cociente sencillo de dos series.

La recompensa es una recurrencia, su duodécimo resultado, en la que cada número de Bernoulli nuevo necesita solo un tercio de los anteriores que exigía el método simple de la primera sección. Para hallar el vigesimocuarto, por ejemplo, le bastan el decimoctavo, el duodécimo y el sexto. Una segunda relación, construida con productos de parejas de estos números, da los mismos valores por otro camino, y Ramanujan dice sin rodeos que está ahí para comprobar los cálculos. Quien haya sumado dos veces una columna larga, una vez hacia arriba y otra hacia abajo, sabe por qué importa.

Con esta maquinaria calcula los veinte primeros números de Bernoulli y los enumera. Empiezan con suavidad, un sexto, un treintavo, un cuarentaidosavo, luego otra vez un treintavo, pero pronto suben con fuerza. El de índice veinte vale unos quinientos veintinueve, el de índice treinta unos seiscientos millones, y el de índice cuarenta unos diecinueve mil billones. Sus denominadores siguen siendo modestos mientras los numeradores llegan a veinte cifras o más, y la tabla termina con la observación de que crecen sin límite.



Pequeños al principio, luego enormes

¿Por qué importa esta tabla? Porque Ramanujan no se quedó en el cálculo. Miró estos valores como un naturalista mira sus ejemplares, buscando regularidades: qué primos dividen los numeradores, cuáles dividen los denominadores y cómo se comportan las partes fraccionarias. La siguiente parte del curso trata de esos patrones, y la tabla de aquí es la evidencia de la que los sacó. Hoy un sistema de álgebra por ordenador produce la misma tabla en un instante, pero Ramanujan la obtuvo a mano, que es justo por lo que la rapidez de su recurrencia importaba tanto.

Quedan fuera aquí las identidades trigonométricas con las raíces cúbicas, las tres fórmulas de cocientes, la forma exacta de la recurrencia y de la relación de comprobación, y las ecuaciones

intermedias que resolvió una a una; están en las secciones cuatro y cinco del artículo.

Para recordar

Las tres raíces cúbicas de uno suman cero, y mezclarlas en la cotangente cancela dos términos de cada tres, dejando hebras de números de Bernoulli separados seis lugares. Esto da a Ramanujan una recurrencia más rápida, que necesita solo un tercio de los números anteriores, junto con una relación de productos aparte para comprobar. Con ella tabula los veinte primeros números de Bernoulli, que empiezan siendo fracciones pequeñas y luego crecen enormemente. Esa tabla es la materia prima de los patrones que enuncia a continuación.

Preguntas

1. ¿Por qué mezclar las tres raíces cúbicas de uno en la cotangente cancela dos términos de cada tres?
 - a. Porque los tres números suman cero, como tres tirones iguales sobre un aro
 - b. Porque cada raíz cúbica vale cero
 - c. Porque la cotangente solo tiene un término de cada tres
 - d. Porque las raíces cúbicas son todas iguales
2. ¿Para qué se usa la segunda relación, construida con productos de parejas?

- a. Para calcular los números más deprisa que la recurrencia
 - b. Para comprobar los cálculos, ya que llega a los mismos valores por otro camino
 - c. Para demostrar que los números son primos
 - d. Para hallar los denominadores
3. ¿Por qué importa la tabla de veinte valores para el resto del artículo?
- a. Es la evidencia de la que Ramanujan saca sus patrones
 - b. Demuestra todas sus afirmaciones posteriores
 - c. Hace innecesaria cualquier fórmula
 - d. Muestra que los números siguen siendo pequeños

Respuestas

1. **a)** Como tres tirones iguales sobre un aro con ángulos iguales, los tres números suman cero, así que dárseles todos a la cotangente cancela dos términos de cada tres.
2. **b)** Da los mismos valores por otro camino, y Ramanujan dice que está ahí para comprobar los cálculos.
3. **a)** Ramanujan miró estos valores como los ejemplares de un naturalista, y la tabla es la evidencia de los patrones que siguen.

Ejercicios

1. Explique con sus propias palabras por qué es valiosa una relación de comprobación aparte cuando se calcula a mano.

Pista: Piense en sumar dos veces una columna larga.

Respuesta: A mano, un solo descuido en un cálculo largo pasa inadvertido y estropea todos los valores posteriores que dependen de él.

Una segunda fórmula que llega a los mismos números por otro camino detecta esos descuidos: si ambas dan la misma fracción, un error es muy improbable.

2. La tabla muestra denominadores pequeños y numeradores que crecen muy deprisa. ¿Qué sugiere eso que debería examinar después un matemático?

Pista: Piense en lo que puede decirse por separado del numerador y del denominador de cada fracción.

Respuesta: Sugiere estudiar las dos partes por separado: qué primos aparecen siempre en los denominadores pequeños, y qué puede decirse de los numeradores enormes. Es justo a lo que pasa Ramanujan a continuación, buscando reglas que relacionen el índice con los primos del numerador y del denominador.

Leer leyes en los ejemplares

Con su tabla de veinte números de Bernoulli en la mano, Ramanujan hace lo que un naturalista hace con un cajón de ejemplares: busca reglas. Las fracciones tienen dos mitades muy distintas. Sus partes de abajo, los denominadores, son pequeñas y ordenadas; sus partes de arriba, los numeradores, son enormes y parecen aleatorias. Así que se hace dos preguntas: ¿qué decide el denominador?, ¿y qué puede decirse del numerador?

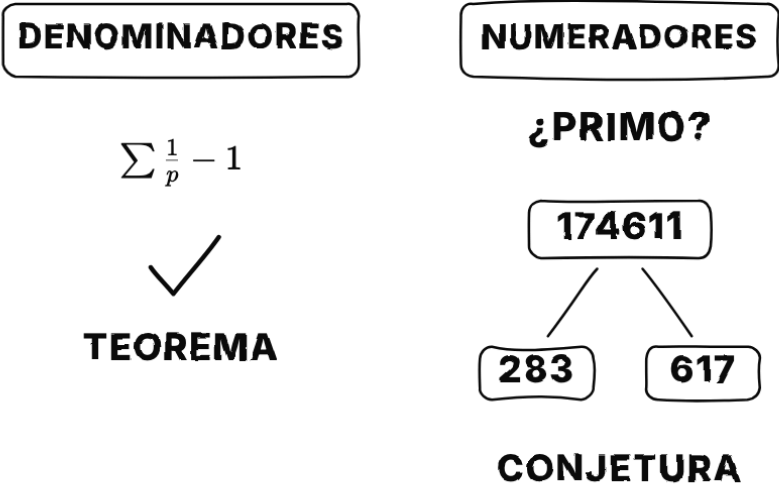
$$\begin{array}{c} \boxed{\text{ENORME}} \\ \hline \boxed{\text{POCO}} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 8 & 12 & 24 \\ \downarrow +1 & & & & & & & \\ 2 & 3 & \cancel{4} & 5 & 7 & \cancel{9} & 13 & \cancel{25} \end{array}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 2730$$

La regla de los denominadores

Para los denominadores encuentra una regla de una sencillez sorprendente. Se toma cada número que divide al índice, se le suma uno, se conservan solo los resultados que son primos y se multiplican: ese producto es el denominador. Para el índice veinticuatro esto da dos mil setecientos treinta, exactamente el número de la tabla. Una prima cercana de la regla dice que la parte de cada número de Bernoulli que queda tras su parte entera está hecha de uno entre cada uno de esos primos, sumados, menos uno. Y de ahí se sigue que cuando dos números de Bernoulli tienen el mismo denominador, su diferencia o su suma, según la pareja, es un número entero. Estas reglas de los denominadores son ciertas: son un teorema famoso que Clausen y von Staudt hallaron décadas antes, y que Ramanujan redescubrió por su cuenta.



Con los numeradores es más atrevido. Observa que, tras dividir entre el índice, el numerador parece ser siempre primo, y que un primo que divide al índice y no aparece en el denominador debe aparecer en cambio en el numerador. También advierte que ciertas combinaciones de un número de Bernoulli con potencias de dos dan siempre enteros impares, y que algunas dejan siempre resto uno al dividirlos entre treinta. El patrón de los impares ya lo conocía Euler. Pero la afirmación del numerador primo no resiste la comprobación: para el índice veinte, el numerador que él llama primo es doscientos ochenta y tres por seiscientos diecisiete. Los editores de sus artículos reunidos dicen sin rodeos que varias de estas afirmaciones eran conjeturas, y que las demostraciones que esboza después dependen de pasos que nunca demostró.

¿Por qué importan, ciertos o no, unos patrones sacados de veinte ejemplos? Porque así es como avanza buena parte de las matemáticas: alguien mira los datos, conjetura reglas, y luego otros las demuestran o las refutan. Las conjeturas de Ramanujan mezclan aquí redescubrimientos de teoremas reales con algunas extrapolaciones esperanzadas, un rasgo que marcaría su obra el resto de su corta vida, y las ciertas se usan todavía hoy, por ejemplo cuando los sistemas de álgebra por ordenador calculan los números de Bernoulli de forma exacta.

Quedan fuera aquí los enunciados precisos con sus números, los ejemplos resueltos para índices concretos, la tabla de denominadores y los detalles de las reglas de divisibilidad y de restos; están en las secciones seis a nueve del artículo.

Para recordar

A partir de su tabla, Ramanujan lee reglas para los numeradores y los denominadores de los números de Bernoulli. El denominador es el producto de los primos que son uno más que un divisor del índice, y la fracción sobrante está hecha de esos mismos primos; estas reglas son un teorema cierto que él redescubrió. Sus afirmaciones sobre los numeradores son más atrevidas: algunas, como los patrones de los impares, son ciertas y conocidas, pero la afirmación de que el numerador es siempre primo falla, y los editores marcan varias afirmaciones como conjeturas.

Preguntas

1. ¿Qué regla encuentra Ramanujan para los denominadores de los números de Bernoulli?
 - a. Tomar los divisores del índice, sumarles uno, quedarse con los primos y multiplicarlos
 - b. Siempre son potencias de dos
 - c. Son iguales al índice más uno
 - d. Son aleatorios
2. ¿Cuál de sus patrones resultó ser un teorema cierto y ya conocido?
 - a. Que el numerador es siempre primo

- b. La regla de los denominadores, hallada por Clausen y von Staudt décadas antes
 - c. Que todo número de Bernoulli es entero
 - d. Que los números disminuyen
3. ¿Qué pasó con la afirmación de que el numerador es siempre primo?
- a. Ramanujan la demostró
 - b. Falla: para el índice veinte el numerador es doscientos ochenta y tres por seiscientos diecisiete
 - c. Los editores la confirmaron
 - d. Se cumple para todos los índices mayores que diez

Respuestas

1. **a)** Se toma cada número que divide al índice, se le suma uno, se conservan solo los primos y se multiplican: ese producto es el denominador.
2. **b)** Las reglas de los denominadores son ciertas: son un teorema famoso de Clausen y von Staudt, que Ramanujan redescubrió.
3. **b)** La afirmación del numerador primo no resiste la comprobación: para el índice veinte, el numerador que él llama primo es doscientos ochenta y tres por seiscientos diecisiete.

Ejercicios

1. Con sus propias palabras, explique por qué adivinar reglas a partir de una tabla de ejemplos es útil aunque algunas conjeturas sean erróneas.

Pista: Piense en lo que ocurre con una conjetura después de que queda por escrito.

Respuesta: Una regla enunciada puede ser puesta a prueba por otros: si es cierta, alguien la demuestra y se convierte en una herramienta; si es falsa, un contraejemplo muestra exactamente dónde falla, lo que también enseña algo. La tabla de Ramanujan produjo ambos tipos: teoremas ciertos, como la regla de los denominadores, y una afirmación del numerador primo que falla.

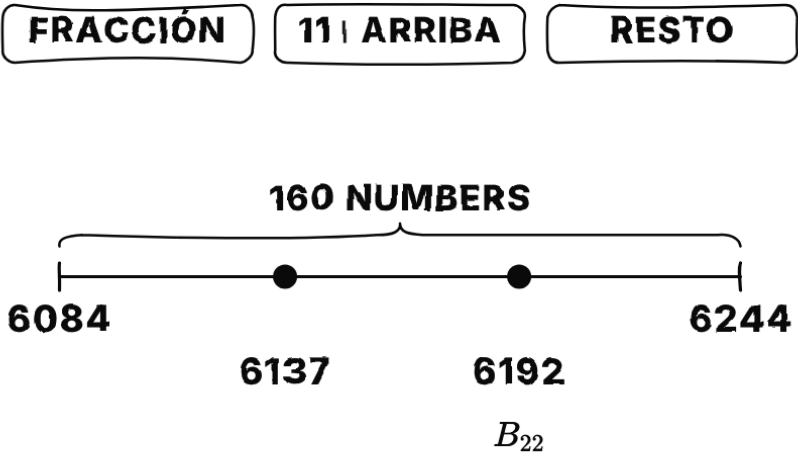
2. ¿Por qué importa que los denominadores sigan una regla sencilla y los numeradores no?

Pista: Piense en cómo se calcularía exactamente un número de Bernoulli.

Respuesta: Si el denominador se conoce de antemano solo a partir del índice, calcular exactamente un número de Bernoulli se reduce a hallar su numerador, y la parte fraccionaria también se conoce. Por eso Ramanujan puede después fijar un valor exacto a partir de cotas aproximadas de su tamaño.

Del tamaño aproximado al valor exacto, y demostraciones pendientes

He aquí un acertijo que resume este tramo del artículo. Alguien le dice que una fracción está en algún lugar entre seis mil y seis mil doscientos cincuenta, le dice su denominador y le da un par de datos sobre su numerador. ¿Puede decir exactamente cuál es? Ramanujan muestra que, para los números de Bernoulli, la respuesta suele ser sí, y aquí es donde todos sus patrones anteriores dan fruto.



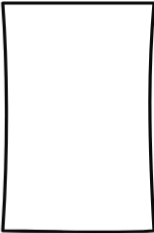
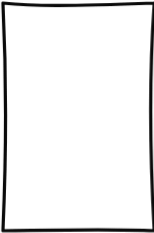
CONJETURA: FALSA

De un intervalo a un valor

Su ejemplo resuelto es el número de Bernoulli de índice veintidós. Conociendo solo unos límites aproximados de su tamaño, usa las reglas de las secciones anteriores: la fracción sobrante tras la parte entera la fijan los primos del denominador, el once debe dividir al numerador y debe cumplirse una regla de restos. De ciento sesenta números enteros del intervalo, solo sobreviven dos candidatos, y elige el correcto, el valor de su propia tabla. Hay una pega en cómo lo elige: se apoya en su conjetura de que el numerador, dividido entre once, es primo, y esa conjetura es falsa precisamente para este número. Así que la idea de combinar un tamaño aproximado con datos aritméticos exactos es sólida y potente, mientras que uno de los datos en que se apoya no lo es.

La siguiente pregunta es de dónde sale el tamaño aproximado. Aquí Ramanujan trae un puente clásico entre los números de Bernoulli y la suma de uno entre cada número entero elevado a una potencia, la misma suma que da π al cuadrado entre seis para los cuadrados. Dice que un número de Bernoulli es, en esencia, un factorial dividido entre una potencia de dos π , multiplicado por una suma apenas mayor que uno. Así que el tamaño de un número de Bernoulli crece como un factorial, lo que explica la explosión de la tabla. También convierte el mismo hecho en fórmulas integrales, y lo introduce en el desarrollo clásico del logaritmo de un factorial, cuyos términos de corrección son a su vez números de Bernoulli. Con suficientes decimales en los logaritmos, esto da la parte entera de cualquier número de Bernoulli, y la regla de los primos da la parte fraccionaria. La dificultad práctica, que él reconoce con honradez, es que las tablas de logaritmos de su época no tenían suficientes decimales, un problema que resuelve un poco más adelante.

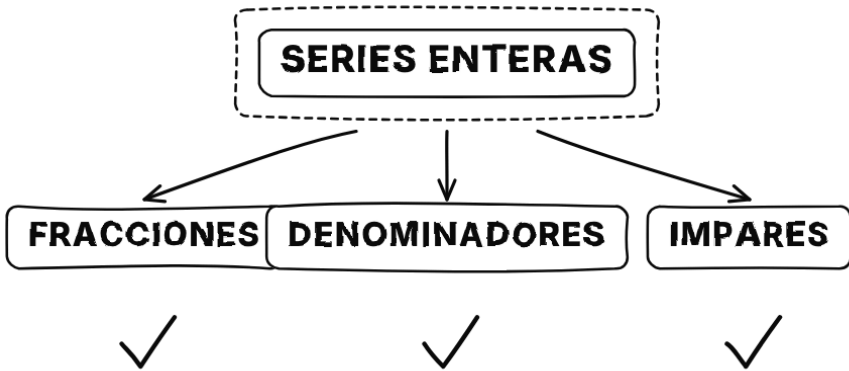
$$B_n \approx \frac{2n!}{(2\pi)^n} \\ \times \left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots\right)$$

≈ 529.12	≈ 529.12
	
B_{20}	$\frac{2 \cdot 20!}{(2\pi)^{20}}$

Por qué crecen como un factorial

Luego intenta demostrar sus propios patrones. Su plan es mostrar que ciertas sumas infinitas, construidas con uno entre los cuadrados de números enteros desplazados y con los primos mayores que tres, pueden reescribirse como series cuyos coeficientes son todos enteros. Si eso fuera cierto, la regla de las partes fraccionarias y la de los denominadores iguales se seguirían de inmediato, y con dos series parecidas, también los patrones de los impares. Es una estrategia elegante: reducir muchos hechos aritméticos a una sola afirmación sobre coeficientes enteros.

SIN DEMOSTRAR



CLAUSEN, VON STAUDT, EULER

Una afirmación sin demostrar

Pero la afirmación en sí nunca se demuestra en el artículo. Los editores de los artículos reunidos señalan que las afirmaciones clave sobre series quedan sin demostrar y que algunos pasos intermedios usan series que no convergen, así que los argumentos, tal como están, son incompletos. Los resultados a los que apuntaba son, sin embargo, ciertos y se conocían antes que él: la regla de las partes fraccionarias es el teorema de Clausen y von Staudt, y el patrón de los impares se remonta a Euler. Lo que sigue siendo impresionante es que un joven que trabajaba solo encontrara los enunciados correctos y un camino plausible hacia ellos.

Quedan fuera aquí las propias fórmulas integrales, el desarrollo del logaritmo del factorial con su término de resto y las identidades de

series detalladas del intento de demostración; están en las secciones diez a doce del artículo.

Para recordar

Unos límites aproximados de un número de Bernoulli, combinados con datos exactos sobre su denominador y su numerador, pueden fijar su valor exacto, aunque el ejemplo de Ramanujan se apoya en una conjetura falsa sobre primos. Una fórmula clásica relaciona los números de Bernoulli con factoriales, potencias de dos π y sumas de inversos de potencias, lo que explica su crecimiento explosivo y da su parte entera a partir de logaritmos precisos. Su intento de demostrar los patrones los reduce a una afirmación sobre series con coeficientes enteros, que nunca demuestra; los resultados buscados son teoremas ciertos hallados antes por otros.

Preguntas

1. ¿Cómo puede determinarse exactamente un número de Bernoulli a partir solo de límites aproximados de su tamaño?
 - a. Combinando los límites con datos exactos sobre su denominador y su numerador
 - b. Adivinando la primera cifra
 - c. Midiéndolo con una calculadora
 - d. No puede hacerse

2. ¿Por qué los números de Bernoulli de la tabla se disparan de tamaño?
 - a. Porque un número de Bernoulli es, en esencia, un factorial dividido entre una potencia de dos π
 - b. Porque sus denominadores disminuyen
 - c. Por errores de redondeo
 - d. Porque se duplican cada vez
3. ¿En qué situación queda el intento de Ramanujan de demostrar sus patrones?
 - a. Completo y aceptado
 - b. Incompleto: se apoya en una afirmación sobre coeficientes enteros que nunca demuestra
 - c. Refutado por completo
 - d. Copiado de Euler

Respuestas

1. **a)** Conociendo unos límites aproximados, usa las reglas de las secciones anteriores, y de ciento sesenta candidatos solo sobreviven dos.
2. **a)** El puente clásico dice que un número de Bernoulli es, en esencia, un factorial dividido entre una potencia de dos π , por una suma apenas mayor que uno, así que crece como un factorial.
3. **b)** Su plan reduce los patrones a una afirmación sobre series con coeficientes enteros, y la afirmación en sí nunca se demuestra en el artículo.

Ejercicios

1. Con sus propias palabras, explique por qué combinar un tamaño aproximado con datos aritméticos exactos es potente.

Pista: Piense en un candado cuya combinación conoce en parte.

Respuesta: El tamaño aproximado limita la respuesta a un intervalo de números enteros, y cada dato exacto descarta la mayoría de los números de ese intervalo. Juntos pueden dejar una única posibilidad, igual que conocer algunas cifras de una combinación y la suma de sus cifras puede identificarla, sin calcular nunca el número directamente.

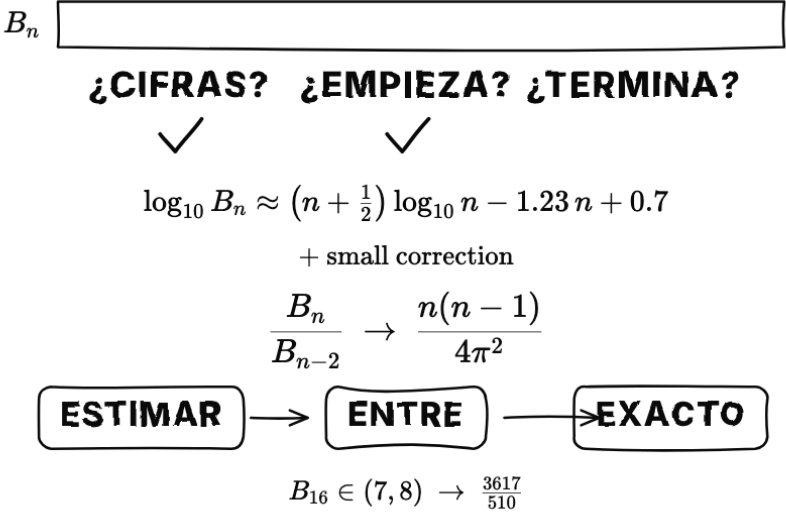
2. ¿Por qué la reducción de muchos patrones a una sola afirmación podría seguir siendo valiosa aunque Ramanujan no demostrara esa afirmación?

Pista: Piense en lo que tendría que hacer un matemático posterior.

Respuesta: Muestra exactamente qué habría que demostrar: una afirmación sobre coeficientes enteros en lugar de muchos hechos sueltos. Quien después demuestre esa afirmación, o encuentre otra demostración de los resultados, sabe dónde está la verdadera dificultad, y los resultados que buscaba resultaron ser teoremas ciertos.

Cuánto mide, y en qué termina

Suponga que alguien le pregunta por un número tan grande que escribirlo llenaría una página. No puede calcularlo, pero aun así puede decir cuántas cifras tiene, por qué empieza e incluso en qué termina. Ese es el truco de este tramo del artículo, aplicado a números de Bernoulli muy por encima de la tabla de Ramanujan.



El tamaño, luego un cociente

Primero, el tamaño. A partir del puente entre los números de Bernoulli y los factoriales, Ramanujan deduce una fórmula aproximada sencilla para el número de cifras. Solo necesita

logaritmos ordinarios del índice, un par de constantes fijas y una pequeña corrección que también indica. Así, para cualquier índice, por grande que sea, puede decir cuántas cifras tiene la parte entera y cuáles son sus primeras cifras, sin calcular el número en sí.

Segundo, un cociente. Comparando cada número de Bernoulli con el que está dos lugares antes, muestra que su cociente se estabiliza muy deprisa en una expresión sencilla construida con el índice y π . Eso da una manera práctica de subir por la tabla: estimar el siguiente número a partir del anterior, ver entre qué dos números enteros está y luego añadir la fracción sobrante de la regla de los primos para obtener el valor exacto. Lo muestra paso a paso para los diez primeros números, cada uno obtenido a partir del anterior.

Tercero, la pieza estrella: el número de Bernoulli de índice cuatrocientos cuarenta y cuatro. En 1911, escribirlo a mano era impensable, y sin embargo Ramanujan lo describe con detalle. Su fracción sobrante sale de la regla de los primos; su parte entera tiene seiscientas treinta y una cifras y empieza por uno, siete, cinco, uno; su numerador completo tiene seiscientas treinta y nueve cifras y empieza por uno, cinco, ocho, ocho. Con sus reglas de restos llega incluso a averiguar cómo terminan la parte entera y el numerador. Es como describir a una persona que nunca ha visto a partir de sus huellas: estatura, peso y forma de andar, todo por indicios indirectos. Parte de esta descripción se apoya en su conjetura no demostrada del numerador primo, pero las estimaciones de tamaño y la parte fraccionaria se asientan sobre terreno firme.

B_{444}

DEMASIADO GRANDE

ENTERA: 631 CIFRAS, 1751...

ARRIBA: 639 CIFRAS, 1588...

...4 ?

...57 ?

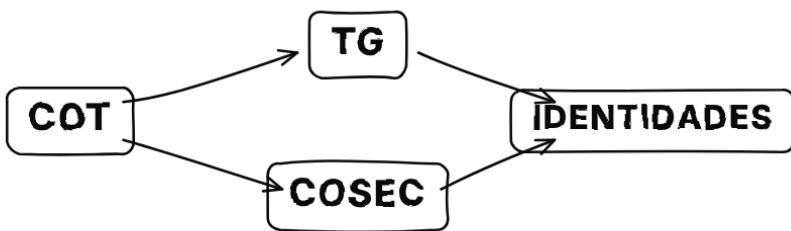
FRACCIÓN: REGLA PRIMOS



COMO LEER HUELLAS

El gigante B_{444}

Por último, observa que todo lo que hizo con la cotangente puede repetirse con la tangente o la cosecante, lo que da aún más identidades entre los números de Bernoulli, con otras separaciones y otras potencias de dos.



DETALLES: SECCIONES 13-16

CIFRAS CON LOGARITMOS

$$\frac{B_n}{B_{n-2}} \approx \frac{n(n-1)}{4\pi^2}$$

B_{444} : length, start, end

Más allá de la cotangente

Quedan fuera aquí la fórmula de las cifras con sus constantes, la fórmula del cociente con su producto sobre primos, la tabla paso a paso de los diez primeros números y las identidades explícitas de la tangente y la cosecante; están en las secciones trece a dieciséis del artículo.

Para recordar

Ramanujan da una fórmula sencilla para cuántas cifras tiene un número de Bernoulli y cómo empieza, válida para cualquier índice. El cociente de cada número de Bernoulli entre el que está dos lugares antes se estabiliza deprisa en una expresión sencilla con π , lo que le permite subir por la tabla y fijar cada valor exacto con la regla de los primos. Luego describe el número de Bernoulli de índice cuatrocientos cuarenta y cuatro, su número de cifras, sus primeras cifras y cómo termina, sin escribirlo nunca, y extiende sus identidades a la tangente y a la cosecante.

Preguntas

1. ¿Qué puede decir la fórmula de las cifras de Ramanujan sobre un número de Bernoulli sin calcularlo?
 - a. Cuántas cifras tiene su parte entera y cuáles son sus primeras cifras
 - b. Su numerador exacto
 - c. Si es primo
 - d. Solo su última cifra
2. ¿Cómo ayuda la regla del cociente a subir por la tabla?
 - a. Estimando el siguiente número a partir del anterior, viendo entre qué dos enteros está y añadiendo luego la fracción sobrante de la regla de los primos
 - b. Multiplicando cada número por dos

- c. Sumando los dos números anteriores
 - d. Dividiendo entre pi cada vez
3. ¿Qué parte de la descripción del número de Bernoulli de índice cuatrocientos cuarenta y cuatro pisa terreno inseguro?
- a. La parte que se apoya en su conjetura no demostrada del numerador primo
 - b. El número de cifras
 - c. La fracción sobrante
 - d. Las primeras cifras

Respuestas

1. **a)** Para cualquier índice, por grande que sea, puede decir cuántas cifras tiene la parte entera y cuáles son sus primeras cifras, sin calcular el número en sí.
2. **a)** Se estima el siguiente número a partir del anterior, se ve entre qué dos números enteros está y luego se añade la fracción sobrante de la regla de los primos para obtener el valor exacto.
3. **a)** Parte de esta descripción se apoya en su conjetura no demostrada del numerador primo, mientras que las estimaciones de tamaño y la parte fraccionaria se asientan sobre terreno firme.

Ejercicios

1. Con sus propias palabras, explique cómo pueden conocerse las primeras cifras y el número de cifras de un número demasiado grande para escribirlo.

Pista: Piense en lo que le dice un logaritmo.

Respuesta: El logaritmo de un número dice su tamaño: su parte entera da el número de cifras, y su parte fraccionaria da las primeras cifras. Si una fórmula estima con precisión el logaritmo, se conocen ambas cosas sin escribir nunca el número.

2. ¿Por qué es útil que el cociente de números de Bernoulli sucesivos se estabilice deprisa en una expresión sencilla?

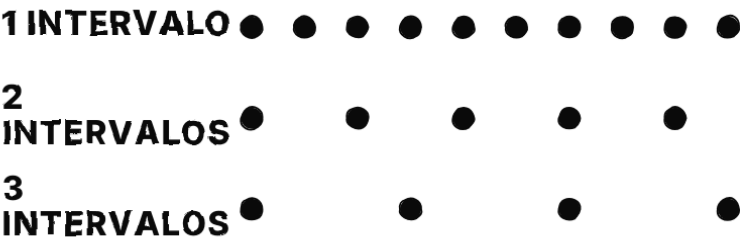
Pista: Piense en cómo hallaría el siguiente número de la tabla.

Respuesta: Permite estimar cada número de Bernoulli nuevo a partir del anterior con la precisión suficiente para saber entre qué dos números enteros está. Como la fracción sobrante se conoce por la regla de los primos, eso basta para escribir el valor exacto.

El patrón general, y lo que dijeron los editores

A estas alturas, un patrón recorre todo el artículo. Con una sola cotangente, Ramanujan obtuvo ecuaciones que usan todos los números de Bernoulli anteriores; emparejarla con una gemela canceló la mitad de los términos; tres raíces cúbicas de uno cancelaron dos términos de cada tres. En las dos últimas secciones le pone nombre a este patrón y lo lleva tan lejos como da de sí.

$$B_2, B_4, B_6, B_8, \dots$$



$$p\text{-th roots of } 1 \rightarrow p\text{-interval}$$

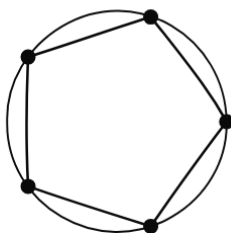


Un patrón, cribas más finas

Llama a estos resultados fórmulas de un intervalo, de dos intervalos y de tres intervalos, según lo separados que queden los números de Bernoulli supervivientes. Y enuncia la receta general: para cualquier número p , se toman las raíces p -ésimas de uno, o de la unidad imaginaria cuando p es par, se mezclan en la cotangente y se obtienen fórmulas de p intervalos, cada una de las cuales conserva en su hebra solo uno de cada p miembros de la familia. Es como un juego de cribas, cada una más fina que la anterior, que reparte el mismo montón de números en bandejas cada vez más separadas.

Para mostrarla en acción, desarrolla el caso de cinco intervalos. Las raíces quintas de uno traen consigo la razón áurea, el número de aproximadamente uno coma seiscientos dieciocho que aparece en los girasoles, en los números de Fibonacci y en la arquitectura clásica. Las fórmulas se escriben con una sucesión de números enteros construida con la razón áurea, primos cercanos de los números de Fibonacci, y cada fórmula aísla los números de Bernoulli separados diez índices. Luego esboza también el caso de cuatro intervalos, construido esta vez con la raíz cuadrada de dos, y observa que identidades parecidas con cosenos dan muchas más. Para un lector de hoy la lección es el método más que las fórmulas: una sola idea, cancelar términos con raíces de uno, genera toda una familia de atajos, igual que un truco ingenioso en un programa de ordenador puede acelerar muchos cálculos a la vez.

CINCO INTERVALOS



$$\varphi \approx 1.618$$

$$1, 3, 4, 7, 11, \dots$$



$$\sqrt{2} \rightarrow \text{four-interval}$$

UN TRUCO, MUCHOS ATAJS

Pentágono y razón áurea

El artículo termina ahí, pero el libro añade una última palabra de los editores de los artículos reunidos de Ramanujan, entre ellos Hardy, quien mejor conocía su obra. Su veredicto es respetuoso y franco. El artículo es interesante como muestra de la primera manera de Ramanujan, pero sus resultados principales ya se conocían, y sus demostraciones son incompletas. La regla de las fracciones sobrantes es el teorema de Clausen y von Staudt, y el patrón de los impares ya lo conocía Euler. De sus ocho afirmaciones aritméticas, indicó demostraciones solo para tres, y esas demostraciones dependen de afirmaciones sobre coeficientes enteros que nunca demostró; otras dos son corolarios, y tres, entre ellas la afirmación del numerador primo y la regla de los denominadores, se enunciaron solo como conjeturas. Los editores señalan también que algunas de sus

deducciones usan series que no convergen, así que los argumentos, tal como están, no son válidos.

EDITORES, CON HARDY
CONOCIDOS; PRUEBAS INCOMPLETAS
CLAUSEN-VON STAUDT, EULER

¿DEMOSTRACIÓN?	COROLARIO	CONJETURA
●	●	●
●	●	●
●		●

✕ ALGUNAS SERIES DIVERGEN

El veredicto de los editores

¿Por qué sigue valiendo la pena leerlo? Porque muestra una mente matemática en su mismo comienzo: autodidacta, sin acceso a la bibliografía, redescubriendo un teorema famoso, encontrando atajos de cálculo rápidos y adivinando patrones a partir de datos con un instinto seguro para los que importan. Pocos años después, trabajando con Hardy, Ramanujan añadiría el rigor que le falta a este primer artículo, y su obra posterior cambió la teoría de números. Este curso ha seguido su primer artículo publicado desde la cotangente hasta el veredicto de los editores; termina aquí.

¿POR QUÉ LEERLO?

REDESCUBRIR

ATAJOS

CONJETURAS

RIGOR

AUTODIDACTA
1911

CON HARDY

RAÍCES DE UNO → HEBRAS MÁS FINAS

CONOCIDOS; PRUEBAS INCOMPLETAS

MÉTODOS RÁPIDOS, CONJETURAS ATREVIDAS

Antes del rigor

Para recordar

Ramanujan generaliza su truco: las raíces p -ésimas de uno, mezcladas en la cotangente, dan fórmulas de p intervalos que reparten los números de Bernoulli en hebras cada vez más finas, desarrolladas por completo en el caso de cinco intervalos, construido sobre la razón áurea. La nota final de los editores dice que los resultados principales del artículo ya se conocían, que sus demostraciones son incompletas y que varias de sus afirmaciones aritméticas son solo conjeturas, una de ellas falsa. Lo que queda es una imagen viva de la primera manera de Ramanujan: métodos rápidos, teoremas redescubiertos y conjeturas atrevidas, antes del rigor que aprendió después.

Preguntas

1. ¿Cuál es la receta general de Ramanujan para las fórmulas de p intervalos?
 - a. Tomar las raíces p -ésimas de uno, o de la unidad imaginaria cuando p es par, y mezclarlas en la cotangente
 - b. Multiplicar la cotangente por p
 - c. Usar p primos distintos
 - d. Dividir la tabla en p partes iguales
2. ¿Qué entra en las fórmulas de cinco intervalos?
 - a. La razón áurea, a través de números enteros construidos con ella

- b. Solo la raíz cuadrada de dos
 - c. El número e
 - d. Solo el número primo cinco
3. ¿Cuál es el veredicto de los editores sobre el artículo?
- a. Interesante como muestra de la primera manera de Ramanujan, pero sus resultados principales ya se conocían y sus demostraciones son incompletas
 - b. Una demostración completa de resultados nuevos
 - c. Completamente falso
 - d. Ilegible

Respuestas

- 1. a)** Para cualquier número p , se toman las raíces p -ésimas de uno, o de la unidad imaginaria cuando p es par, se mezclan en la cotangente y se obtienen fórmulas de p intervalos.
- 2. a)** Las raíces quintas de uno traen consigo la razón áurea, y las fórmulas se escriben con una sucesión de números enteros construida con ella.
- 3. a)** El artículo es interesante como muestra de la primera manera de Ramanujan, pero sus resultados principales ya se conocían, y sus demostraciones son incompletas.

Ejercicios

- 1.** Con sus propias palabras, explique la imagen de las cribas para las fórmulas por intervalos.

Pista: Piense en lo que hace cada criba más fina con el montón de números de Bernoulli.

Respuesta: Cada fórmula por intervalos conserva solo números de Bernoulli separados una distancia fija, así que la familia queda repartida en hebras separadas. Una criba más fina, con más raíces de uno, hace las hebras más delgadas, así que cada número nuevo de una hebra depende de menos números anteriores.

2. ¿Por qué podría valer la pena estudiar un artículo con demostraciones incompletas y algunas conjeturas falsas?

Pista: Piense en lo que muestra sobre cómo se descubren las matemáticas.

Respuesta: Muestra el descubrimiento en acción: métodos rápidos, un teorema famoso redescubierto de forma independiente y conjeturas atrevidas a partir de datos, unas acertadas y otras no. Ver qué conjeturas sobrevivieron, y por qué las demostraciones se quedan cortas, enseña a juzgar argumentos matemáticos, y muestra el punto de partida de un matemático cuya obra posterior, hecha rigurosa con Hardy, cambió la teoría de números.