

Собрание статей Сринивасы Рамануджана



Srinivasa Ramanujan · 1927

Иллюстрированные аудиолекции

Lecturized

Собрание статей Сринивасы Рамануджана

Иллюстрированные аудиолекции

Srinivasa Ramanujan · 1927

Пересказано в иллюстрированных лекциях Lecturized
lecturized.com

По оригиналу: Collected Papers of Srinivasa Ramanujan, ed. G. H. Hardy, P. V. Seshu
Aiyar and B. M. Wilson (Cambridge, 1927)

Содержание

Некоторые свойства чисел Бернулли

Параграф 4

Параграфы 5–7

Параграфы 8–11

Параграф 12

Параграфы 13–15

Параграфы 16 и 17

Параграф 18 и примечание редакторов

Некоторые свойства чисел Бернулли

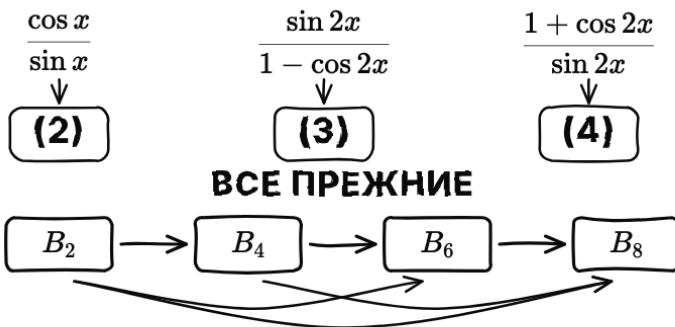
Журнал Индийского математического общества, том третий, 1911 год, страницы 219–234.

Параграф 1.

Запишем хорошо известное разложение $x \operatorname{ctg} x$ (см.

«Дифференциальное исчисление» Эдвардса, § 149) в виде $x \operatorname{ctg} x = 1 - (B_2/2!)(2x)^2 - (B_4/4!)(2x)^4 - (B_6/6!)(2x)^6 - \dots$; это равенство один, и из него мы заключаем, что B_0 можно считать равным минус единице.

Далее, $\operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x = (1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \dots) / (x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \dots)$. Он также равен $\sin 2x / (1 - \cos 2x) = (2x/1! - (2x)^3/3! + (2x)^5/5! - \dots) / ((2x)^2/2! - (2x)^4/4! + (2x)^6/6! - \dots)$. И он равен $(1 + \cos 2x) / \sin 2x = (2 - (2x)^2/2! + (2x)^4/4! - \dots) / (2x - (2x)^3/3! + (2x)^5/5! - \dots)$.



$$(x \cot x)^2 = -x^2 \left(1 + \frac{d \cot x}{dx} \right)$$

$$\frac{1}{2}(n+1)B_n = c_2 B_2 B_{n-2} + c_4 B_4 B_{n-4} + \dots \quad (5)$$

$$\frac{d \tan x}{dx} = 1 + \tan^2 x$$

Три отношения, три равенства

Умножая обе части каждого из трёх этих соотношений на знаменатель правой части и приравнивая коэффициенты при x^n в обеих частях, мы можем записать результаты так. Первый: $c_1 B_{n-1}/2 - c_3 B_{n-3}/2^3 + c_5 B_{n-5}/2^5 - \dots + (-1)^{((n-1)/2)} B_0/2^n + (n/2^n)(-1)^{((n-1)/2)} = 0$ — равенство два, где n — любое нечётное целое число. Второй: $c_2 B_{n-2} - c_4 B_{n-4} + c_6 B_{n-6} - \dots + (-1)^{((n-2)/2)} B_0 + (n/2)(-1)^{((n-2)/2)} = 0$ — равенство три, где n — любое чётное целое число. Третий: $c_1 B_{n-1} - c_3 B_{n-3} + c_5 B_{n-5} - \dots + (-1)^{((n-1)/2)} B_0 + (n/2)(-1)^{((n-1)/2)} = 0$ — равенство четыре, где n — любое нечётное целое число, большее единицы.

Из любого из равенств два, три и четыре можно вычислить числа B . Но с ростом n вычисления становятся всё утомительнее.

Поэтому мы попробуем найти более простые способы.

Параграф 2.

Мы знаем, что $(x \operatorname{ctg} x)^2 = -x^2(1 + d \operatorname{ctg} x / dx)$. Пользуясь равенством один, приравнивая коэффициенты при x^n в обеих частях и упрощая, получаем $\frac{1}{2}(n+1) B_n = c_2 B_2 B_{n-2} + c_4 B_4 B_{n-4} + c_6 B_6 B_{n-6} + \dots$, где последний член равен $c_{(n/2-1)} B_{(n/2-1)} B_{(n/2+1)}$ или $\frac{1}{2} c_{(n/2)} (B_{(n/2)})^2$ в зависимости от того, нечётно или чётно $\frac{1}{2}n$; это результат пять.

Похожий результат можно получить, приравнивая коэффициенты при x^n в тождестве $d \operatorname{tg} x / dx = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

Параграф 3.

СТГ	B_0	B_2	B_4	B_6	B_8	B_{10}
СТН	+	-	+	-	+	-
СУММА						
РАЗН.						

$\frac{n}{2}$ terms

$\frac{n}{4}$ terms

Каждый второй член сокращается

Далее, $-\frac{1}{2}x(\operatorname{ctg} \frac{1}{2}x + \operatorname{cth} \frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2}x(\operatorname{ctg} \frac{1}{2}x + i \operatorname{ctg} \frac{1}{2}ix) = 2(B_0 + B_4 x^4/4! + B_8 x^8/8! + \dots)$ в силу равенства один. Это выражение можно записать и как $-\frac{1}{2}x (\cos \frac{1}{2}x \sin \frac{1}{2}ix + i \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}ix) / (\sin \frac{1}{2}x \sin \frac{1}{2}ix)$, то есть $-\frac{1}{2}x ((1 + i) \sin \frac{1}{2}x(1 + i) - (1 - i) \sin \frac{1}{2}x(1 - i)) / (\cos \frac{1}{2}x(1 - i) - \cos \frac{1}{2}x(1 + i))$, то есть $-x (x/1! - x^5/(2^2 \cdot 5!) + x^9/(2^4 \cdot 9!) - \dots) / (x^2/2! - x^6/(2^2 \cdot 6!) + x^{10}/(2^4 \cdot 10!) - \dots)$, если разложить числитель и знаменатель и упростить по теореме Муавра.

Отсюда $2(B_0 + B_4 x^4/4! + B_8 x^8/8! + \dots) = -x (x/1! - x^5/(2^2 \cdot 5!) + \dots) / (x^2/2! - x^6/(2^2 \cdot 6!) + \dots)$; это равенство шесть.

Аналогично, $-1/2x(\operatorname{ctg} 1/2x - \operatorname{cth} 1/2x) = 2(B_2 x^2/2! + B_6 x^6/6! + B_{10} x^{10}/10! + \dots)$. Это равно $x(1/2(1-i)\sin 1/2x(1+i) - 1/2(1+i)\sin 1/2x(1-i)) / (\cos 1/2x(1+i) - \cos 1/2x(1-i))$, то есть $x(x^3/(2 \cdot 3!) - x^7/(2^3 \cdot 7!) + x^{11}/(2^5 \cdot 11!) + \dots) / (x^2/2! - x^6/(2^2 \cdot 6!) + x^{10}/(2^4 \cdot 10!) - \dots)$; это равенство семь.

Действуя как в параграфе 1, получаем при чётном целом n , большем 2: $c_2 B_{n-2}/2 - c_6 B_{n-6}/2^3 + c_{10} B_{n-10}/2^5 - \dots + (n/2^{((n+2)/2))}(-1)^{(n/4)}$ или $(n/2^{((n+2)/2))}(-1)^{((n-2)/4)} = 0$ — равенство восемь, смотря по тому, кратно четырём n или n минус 2.

Аналогичные результаты можно получить из $\operatorname{tg} 1/2x \pm \operatorname{th} 1/2x$.

В равенствах два, три и четыре $1/2n$ членов, а в равенствах пять и восемь — $1/4n$ или $1/4(n-2)$ членов. Тем самым B_n можно найти лишь по половине предыдущих чисел B .

Вопросы

1. Почему в равенстве (1) можно считать, что $B_0 = -1$?
 - a. Потому что все числа Бернулли с чётным номером отрицательны
 - b. Потому что тогда свободный член 1 ряда $x \operatorname{ctg} x$ вписывается в ту же закономерность, что и остальные: $-B_0$, умноженное на $(2x)^0$ и делённое на 0!
 - c. Потому что вблизи нуля $\operatorname{ctg} x$ отрицателен
 - d. Потому что B_0 должно сократить член с B_2

2. Как Рамануджан превращает три выражения для $\text{ctg } x$ в равенства (2), (3) и (4)?
- a. Интегрируя обе части от 0 до x
 - b. Подставляя вместо x малые числа и решая
 - c. Умножая каждое соотношение на знаменатель правой части и приравнивая коэффициенты при x^n в обеих частях
 - d. Логарифмируя обе части
3. Почему после равенств (2)–(4) Рамануджан ищет другие способы?
- a. Потому что при больших n эти равенства неверны
 - b. Потому что с ростом n вычисления становятся утомительными
 - c. Потому что они дают только числа B с нечётным номером
 - d. Потому что им нужно значение π
4. Что выигрывают соотношения (5) и (8) по сравнению с (2), (3) и (4)?
- a. Им нужна лишь примерно четверть n членов вместо половины n , так что B_n получается лишь по половине предыдущих чисел B
 - b. Они дают B_n без всяких прежних чисел B
 - c. Они работают только при нечётных n
 - d. Они сразу дают знаменатели чисел B

Ответы

1. б) Равенство (1) записывает каждый член как минус B , делённое на факториал и умноженное на степень $2x$; первый член, 1, имеет такой вид, только если B_0 равно -1 .

2. с) После умножения на знаменатель остаются два степенных ряда, которые должны совпадать почленно; приравнивание коэффициентов при x^n даёт одно соотношение между числами B .

3. б) Любое из трёх равенств даёт числа B , но с ростом n вычисления становятся всё утомительнее.

4. а) В (2), (3) и (4) половина n членов, а в (5) и (8) — четверть n или четверть от n минус 2, так что нужна лишь половина предыдущих чисел B .

Разобранные примеры

Первые два числа B из равенства (3) С помощью равенства (3) при $B_0 = -1$ для $n = 4$ и $n = 6$ найдите B_2 и B_4 . Здесь c_k — число способов выбрать k предметов из n .

При $n = 4$ члены такие: $c_2 B_2$, затем член с B_0 со знаком $(-1)^{((4-2)/2)} = -1$, затем $(4/2)$, умноженное на тот же знак.

Так как $c_2 = 6$, получаем $6B_2 - B_0 - 2 = 0$, а поскольку $B_0 = -1$, это $6B_2 + 1 - 2 = 0$, значит, $B_2 = 1/6$.

При $n = 6$ коэффициенты равны $c_2 = 15$ и $c_4 = 15$, а знак члена с B_0 равен $(-1)^2 = +1$.

Значит, $15B_4 - 15B_2 + B_0 + 3 = 0$, то есть $15B_4 - 15/6 - 1 + 3 = 0$.

Отсюда $15B_4 = 1/2$ и $B_4 = 1/30$.

Ответ: $B_2 = 1/6$ и $B_4 = 1/30$

Задачи

1. Подставьте $n = 8$ в равенство (3) и найдите B_6 , взяв $B_2 = 1/6$, $B_4 = 1/30$ и $B_0 = -1$.

Подсказка: Коэффициенты равны $c_2 = 28$, $c_4 = 70$, $c_6 = 28$, а знак $(-1)^{((8-2)/2)}$ равен -1 .

Ответ: $B_6 = 1/42$. Уравнение имеет вид $28B_6 - 70/30 + 28/6 - B_0 - 4 = 0$, то есть $28B_6 - 7/3 + 14/3 + 1 - 4 = 0$, откуда $28B_6 = 2/3$.

2. С помощью результата (5) при $n = 4$ найдите B_4 по $B_2 = 1/6$.

Подсказка: Половина от 4 — это 2, число чётное, так что единственный член — $\frac{1}{2} c_2 (B_2)^2$, где $c_2 = 6$.

Ответ: $B_4 = 1/30$. Результат (5) даёт $\frac{1}{2} \times 6 \times B_4 = \frac{1}{2} \times 6 \times (1/6)^2 = 1/12$, так что $B_4 = 2/60 = 1/30$.

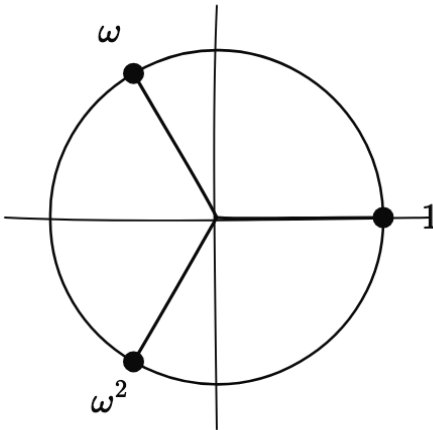
3. Проверьте равенство (1) численно при $x = 0,1$ по его первым трём членам и сравните с $0,1 \operatorname{ctg} 0,1 = 0,9966644$.

Подсказка: Второй член равен $(B_2/2!)(2x)^2$, где $B_2 = 1/6$; в третьем используются $B_4 = 1/30$ и $4! = 24$.

Ответ: $1 - 0,04/12 - 0,0016/720 = 1 - 0,0033333 - 0,0000022 = 0,9966645$, что совпадает с $0,9966644$ до шестого знака после запятой; следующий член ещё меньше.

Параграф 4

Ещё более простой способ можно вывести из следующих тождеств.



$$\omega^3 = 1$$

$$1 + \omega + \omega^2 = 0$$

$$-\frac{1}{2}x \left(\cot \frac{1}{2}x + \omega \cot \frac{1}{2}x\omega + \omega^2 \cot \frac{1}{2}x\omega^2 \right)$$

Три кубических корня из единицы

Если $1, \omega, \omega^2$ — три кубических корня из единицы, то $4 \sin x \sin x\omega \sin x\omega^2 = -(\sin 2x + \sin 2x\omega + \sin 2x\omega^2)$, в чём легко убедиться.

Логарифмическим дифференцированием получаем $\operatorname{ctg} x + \omega \operatorname{ctg} x\omega + \omega^2 \operatorname{ctg} x\omega^2 = 2(\cos 2x + \omega \cos 2x\omega + \omega^2 \cos 2x\omega^2) / (\sin 2x + \sin 2x\omega + \sin 2x\omega^2)$.

Заменяя x на $1/2x$, получаем $-1/2x(\operatorname{ctg} 1/2x + \omega \operatorname{ctg} 1/2x\omega + \omega^2 \operatorname{ctg} 1/2x\omega^2) = -x(\cos x + \omega \cos x\omega + \omega^2 \cos x\omega^2) / (\sin x + \sin x\omega + \sin x\omega^2)$ и, действуя как в параграфе 3, находим $3(B_0 + B_6 x^6/6! + B_{12} x^{12}/12! + \dots) = -x(x^2/2! - x^8/8! + x^{14}/14! - \dots) / (x^3/3! - x^9/9! + x^{15}/15! - \dots)$; это равенство девять.

Далее, $\operatorname{ctg} 1/2x\omega - \operatorname{ctg} 1/2x\omega^2 = (\cos x\omega^2 - \cos x\omega) / (2 \sin 1/2x \sin 1/2x\omega \sin 1/2x\omega^2) = 2(\cos x\omega - \cos x\omega^2) / (\sin x + \sin x\omega + \sin x\omega^2)$.

Умножая обе части на $-1/2x(\omega^2 - \omega)$ и прибавляя к соответствующим частям предыдущего результата, получаем $-1/2x(\operatorname{ctg} 1/2x + \omega^2 \operatorname{ctg} 1/2x\omega + \omega \operatorname{ctg} 1/2x\omega^2) = -x(\cos x + \omega^2 \cos x\omega + \omega \cos x\omega^2) / (\sin x + \sin x\omega + \sin x\omega^2)$.

Отсюда, как и прежде, $3(B_2 x^2/2! + B_8 x^8/8! + B_{14} x^{14}/14! + \dots) = x(x^4/4! - x^{10}/10! + x^{16}/16! - \dots) / (x^3/3! - x^9/9! + x^{15}/15! - \dots)$; это равенство десять.

Аналогично, $-x(\operatorname{ctg} 1/2x + \operatorname{ctg} 1/2x\omega + \operatorname{ctg} 1/2x\omega^2) = x(\cos x + \cos x\omega + \cos x\omega^2 - 3) / (\sin x + \sin x\omega + \sin x\omega^2)$, и поэтому $6(B_4 x^4/4! + B_{10} x^{10}/10! + B_{16} x^{16}/16! + \dots) = x(x^6/6! - x^{12}/12! + x^{18}/18! - \dots) / (x^3/3! - x^9/9! + x^{15}/15! - \dots)$; это равенство одиннадцать.

Умножая на знаменатели и, как обычно, приравнивая коэффициенты в равенствах девять, десять и одиннадцать, получаем $s_3 B_{n-3} - s_9 B_{n-9} + s_{15} B_{n-15} - \dots = 0$ — равенство двенадцать, где последний член равен $1/3n(-1)^{((n-1)/3)}$, $1/3n(-1)^{((n+1)/3)}$ или $1/3n(-1)^{((n-3)/3)}$.

Далее, деля обе части равенства десять на x и дифференцируя, получаем $3(B_2/2! + 7B_8 x^6/8! + 13B_{14} x^{12}/14! + \dots) = d/dx$ от $(x^4/4! - x^{10}/10! + x^{16}/16! - \dots) / (x^3/3! - x^9/9! + x^{15}/15! - \dots)$, что равно

$$1 - (x^2/2! - x^8/8! + x^{14}/14! - \dots)(x^4/4! - x^{10}/10! + x^{16}/16! - \dots) / (x^3/3! - x^9/9! + x^{15}/15! - \dots)^2.$$

Отсюда в силу равенств девять и десять $3(B_2 x^2/2! + 7B_8 x^8/8! + 13B_{14} x^{14}/14! + \dots) = x^2 + 9(B_0 + B_6 x^6/6! + B_{12} x^{12}/12! + \dots)(B_2 x^2/2! + B_8 x^8/8! + B_{14} x^{14}/14! + \dots).$

Приравнивая коэффициенты при x^n , получаем при n больше 2 и n минус 2, кратном 6: $\frac{1}{3}(n+2) B_n = c_6 B_{n-6} B_6 + c_{12} B_{n-12} B_{12} + c_{18} B_{n-18} B_{18} + \dots$; это равенство тринадцать.

Из равенства двенадцать числа B вычисляются очень быстро, а равенство тринадцать может оказаться полезным для проверки вычислений. Число членов составляет треть от числа членов в равенстве четыре; так, B_{24} находится по B_{18} , B_{12} и B_6 .

Вопросы

1. Чего достигает использование трёх кубических корней из единицы в параграфе 4?
 - a. Числа B становятся целыми
 - b. Числа B разделяются на три класса с шагом шесть, так что каждое равенство сохраняет лишь каждое шестое B
 - c. Сравнение коэффициентов становится ненужным
 - d. Получаются числа B с нечётным номером
2. Какое равенство, по словам Рамануджана, вычисляет числа B очень быстро, а какое служит для проверки?

- a. Равенство тринадцать вычисляет их, равенство двенадцать проверяет
 - b. Равенство двенадцать вычисляет их, равенство тринадцать полезно для проверки
 - c. Оба лишь проверяют прежние результаты
 - d. Равенство четыре вычисляет их, равенство двенадцать проверяет
3. По каким прежним числам В находится В₂₄ новым способом?
- a. По всем от В₂ до В₂₂
 - b. По В₁₈, В₁₂ и В₆
 - c. Только по В₂₂
 - d. Только по В₁₂

Ответы

1. b) Равенства девять, десять и одиннадцать сохраняют соответственно В₀, В₆, В₁₂...; В₂, В₈, В₁₄... и В₄, В₁₀, В₁₆....
2. b) Из равенства двенадцать числа В вычисляются очень быстро, а равенство тринадцать может оказаться полезным для проверки вычислений.
3. b) Число членов составляет треть от числа членов в равенстве четыре; так, В₂₄ находится по В₁₈, В₁₂ и В₆.

Разобранные примеры

Проверка равенства тринадцать при $n = 8$ Равенство тринадцать выполняется, когда $n - 2$ кратно 6. Примените его при $n = 8$, $B_2 = 1/6$ и $B_6 = 1/42$, чтобы найти B_8 .

При $n = 8$ в правой части есть только первый член: $c_6 B_2 B_6$, где c_6 — число способов выбрать 6 из 8, то есть 28.

Правая часть равна $28 \times 1/6 \times 1/42 = 28/252 = 1/9$.

Левая часть равна $1/3(8 + 2) B_8 = (10/3) B_8$.

Значит, $B_8 = (1/9) \times (3/10) = 1/30$.

Ответ: $B_8 = 1/30$

Задачи

1. Проверьте старший член равенства девять: к чему стремится при очень малом x правая часть $-x (x^2/2! - \dots) / (x^3/3! - \dots)$ и что это говорит о B_0 ?

Подсказка: Оставьте только первый член числителя и знаменателя.

Ответ: Она стремится к $-x (x^2/2) / (x^3/6) = -3$, а левая часть — к $3B_0$, так что $B_0 = -1$, как в параграфе 1.

2. Так же проверьте старший член равенства десять и найдите B_2 .

Подсказка: Правая часть начинается с $x (x^4/24) / (x^3/6)$, левая — с $3 B_2 x^2/2$.

Ответ: Правая часть равна $x^2/4$, так что $3B_2/2 = 1/4$ и $B_2 = 1/6$.

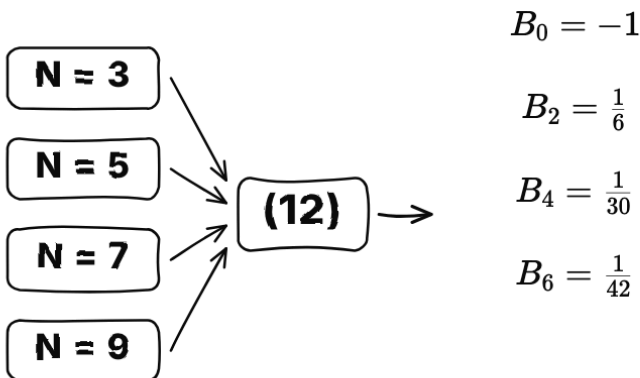
3. Проверьте старший член равенства одиннадцать и найдите B_4 .

Подсказка: Правая часть начинается с $x (x^6/720) / (x^3/6)$, левая — с $6 B_4 x^4/24$.

Ответ: Правая часть равна $x^4/120$, а левая — $B_4 x^4/4$, так что $B_4 = 1/30$.

Параграфы 5–7

Параграф 5.



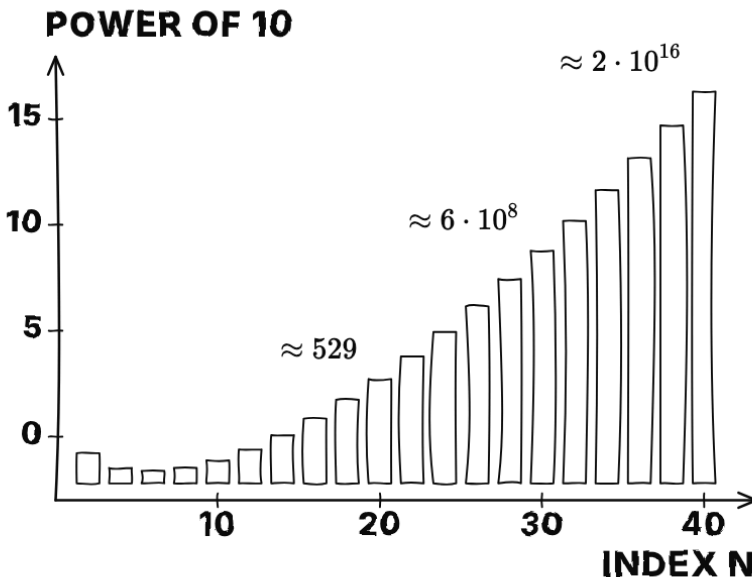
$$B_{22} - \frac{3553}{4}B_{16} + \dots = -\frac{1}{552}$$

Подставляем $n = 3, 5, 7, \dots$ в (12)

Позже мы увидим, как числа B можно получить из одних только их свойств. Но чтобы узнать эти свойства, удобно вычислить несколько чисел B , подставляя вместо n последовательно 3, 5, 7, 9 и так далее в равенство двенадцать. Так, $B_0 = -1$; $B_2 = 1/6$; $B_4 = 1/30$; $B_6 = 1/42$; $B_8 - \frac{1}{3}B_2 = -1/45$. Далее, $B_{10} - (5/2)B_4 = -1/132$; $B_{12} - 11B_6 = -4/455$; $B_{14} - (143/4)B_8 + B_2/5 = 1/120$. Далее, $B_{16} - (286/3)B_{10} + 4B_4 = 1/306$; $B_{18} - 221B_{12} + (204/5)B_6 = 3/665$.

Затем $B_{20} - (3230/7)B_{14} + (1938/7)B_8 - B_2/7 = -1/231$. И $B_{22} - (3553/4)B_{16} + (7106/5)B_{10} - (11/2)B_4 = -1/552$, и так далее.

Отсюда окончательно получаем следующие значения: $B_2 = 1/6$; $B_4 = 1/30$; $B_6 = 1/42$; $B_8 = 1/30$; $B_{10} = 5/66$; $B_{12} = 691/2730$. Затем $B_{14} = 7/6$; $B_{16} = 3617/510$; $B_{18} = 43867/798$; $B_{20} = 174611/330$; $B_{22} = 854513/138$. Затем $B_{24} = 236364091/2730$; $B_{26} = 8553103/6$; $B_{28} = 23749461029/870$. Затем $B_{30} = 8615841276005/14322$; $B_{32} = 7709321041217/510$; $B_{34} = 2577687858367/6$. Затем $B_{36} = 26315271553053477373/1919190$; $B_{38} = 2929993913841559/6$. И $B_{40} = 261082718496449122051/13530$, и так далее, причём $B_{\infty} = \infty$.



Сначала малые, потом огромные

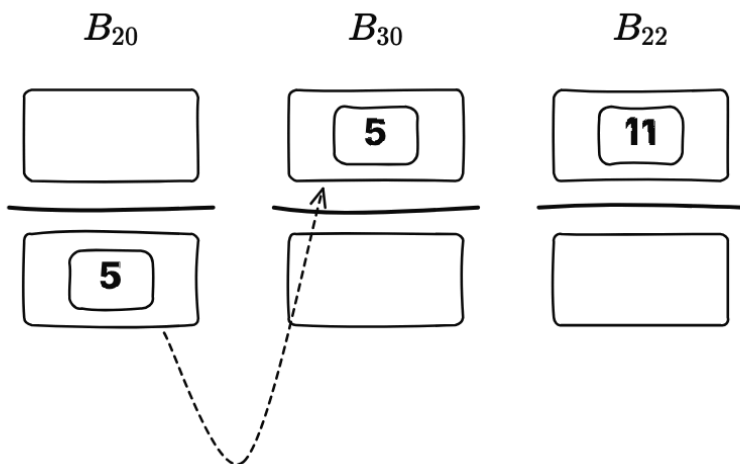
Параграф 6.

Можно заметить, что при чётном n , не равном нулю, выполняется следующее. Во-первых, B_n — дробь, и числитель B_n/n в несократимом виде — простое число; это утверждение четырнадцать. Во-вторых, знаменатель B_n содержит каждый из множителей 2 и 3 один и только один раз; это утверждение пятнадцать. В-третьих, $2^n(2^n - 1)B_n/n$ — целое число, а следовательно, $2(2^n - 1)B_n$ — нечётное целое число; это утверждение шестнадцать.

Из утверждения шестнадцать легко показать, что знаменатель $2(2^n - 1)B_n/n$ в несократимом виде есть наибольшая степень 2, делящая n ; и следовательно, если n не кратно 4, то $4(2^n - 1)B_n/n$ — нечётное целое число; это утверждение семнадцать.

Из утверждения четырнадцать следует, что числитель B_n в несократимом виде делится на наибольший делитель n , взаимно простой со знаменателем, и частное — простое число; это утверждение восемнадцать.

Примеры. Во-первых, 2 и 3 — единственные простые множители 12, 24 и 36, и они находятся в знаменателях B_{12} , B_{24} и B_{36} , а числители этих чисел — простые числа.



Простое число идёт вверх или вниз

Во-вторых, 11 нет в знаменателе B_{22} , а потому его числитель делится на 11; подобным же образом числители B_{26} , B_{34} и B_{38} делятся соответственно на 13, 17 и 19, и частные во всех случаях — простые числа.

В-третьих, 5 есть в знаменателе B_{20} и нет в знаменателе B_{30} , и следовательно, числитель B_{30} делится на 5, а числитель B_{20} — простое число. Так что можно сказать: если простое число, входящее в n , не находится в знаменателе, то оно появится в числителе, и наоборот.

Параграф 7.

$$B_{24} = \frac{236364091}{2730}$$

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 8 & 12 & 24 \\ \downarrow +1 & & & & & & & & \\ 2 & 3 & \cancel{4} & 5 & 7 & \cancel{9} & 13 & \cancel{25} & \end{array}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 2730$$

$$B_2 : 6$$

$$B_{20} : 330$$

$$B_{12} : 2730$$

$$B_{30} : 14322$$

Строим знаменатель B_{24}

Теперь рассмотрим знаменатели.

Все знаменатели делятся на 6; знаменатели B_4 , B_8 , B_{12} и так далее — на 5; знаменатели B_6 , B_{12} , B_{18} и так далее — на 7; знаменатели B_{10} , B_{20} , B_{30} и так далее — на 11; но знаменатели B_8 , B_{16} , B_{24} и так далее не делятся на 9, а знаменатели B_{14} , B_{28} и так далее не делятся на 15. Отсюда можно заключить, что знаменатель B_n есть произведение простых чисел, которые в натуральном ряду следуют за делителями n , включая единицу и само число; это утверждение девятнадцать.

Для примера возьмём знаменатель B_{24} . Выпишем все делители 24, а именно 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 и 24. Следующие за ними числа — 2,

3, 4, 5, 7, 9, 13 и 25. Вычеркнем составные числа, и останутся простые числа 2, 3, 5, 7 и 13. И знаменатель B_{24} есть произведение 2, 3, 5, 7 и 13, то есть 2730.

Нечётные делители n , кроме единицы, выписывать незачем, так как следующие за ними числа чётны, а значит, составные.

Вот ещё несколько примеров: чётные делители n вместе с единицей и знаменатель. Для B_2 : 1 и 2, что даёт 2 на 3, то есть 6. Для B_6 : 1, 2 и 6, что даёт 2 на 3 на 7, то есть 42. Для B_{12} : 1, 2, 4, 6 и 12, что даёт 2 на 3 на 5 на 7 на 13, то есть 2730. Для B_{20} : 1, 2, 4, 10 и 20, что даёт 2 на 3 на 5 на 11, то есть 330. Для B_{30} : 1, 2, 6, 10 и 30, что даёт 2 на 3 на 7 на 11 на 31, то есть 14322. Для B_{42} : 1, 2, 6, 14 и 42, что даёт 2 на 3 на 7 на 43, то есть 1806. Для B_{56} : 1, 2, 4, 8, 14, 28 и 56, что даёт 2 на 3 на 5 на 29, то есть 870. Для B_{72} : 1, 2, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 36 и 72, что даёт 2 на 3 на 5 на 7 на 13 на 19 на 37 на 73, то есть 140100870. Для B_{90} : 1, 2, 6, 10, 18, 30 и 90, что даёт 2 на 3 на 7 на 11 на 19 на 31, то есть 272118. Для B_{110} : 1, 2, 10, 22 и 110, что даёт 2 на 3 на 11 на 23, то есть 1518.

Вопросы

1. Зачем Рамануджан вычисляет таблицу чисел B в параграфе 5?
 - а. Чтобы показать, что равенство двенадцать неверно
 - б. Потому что, чтобы узнать свойства чисел B , удобно сначала иметь несколько значений
 - в. Потому что другим способом числа B получить нельзя
 - г. Чтобы найти значение π

2. Что, согласно утверждению пятнадцать, можно сказать о знаменателе B_n ?
- a. Он всегда простой
 - b. Он содержит каждый из множителей 2 и 3 один и только один раз
 - c. Он всегда степень 2
 - d. Он равен $n + 1$
3. Как утверждение девятнадцать описывает знаменатель B_n ?
- a. Как произведение простых чисел, на единицу больших делителей n , включая единицу и само n
 - b. Как произведение всех простых чисел меньше n
 - c. Как n факториал
 - d. Как квадрат n
4. Почему нечётные делители n , кроме единицы, выписывать не нужно?
- a. Потому что нечётные делители никогда не делят n
 - b. Потому что следующие за нечётными делителями числа чётны, а значит, составные
 - c. Потому что они дают вместо этого числитель
 - d. Потому что они всегда простые

Ответы

1. b) Он говорит, что для знания этих свойств удобно вычислить несколько чисел B , подставляя 3, 5, 7, 9, ... вместо n в равенство двенадцать.

2. б) Утверждение пятнадцать: знаменатель B_n содержит каждый из множителей 2 и 3 один и только один раз.

3. а) Знаменатель есть произведение простых чисел, следующих за делителями n , включая единицу и само число.

4. б) Число, следующее за нечётным делителем, чётно, значит, составное, так что простого в знаменатель оно не даёт.

Разобранные примеры

Знаменатель B_{24} С помощью утверждения девятнадцать найдите знаменатель B_{24} .

Выпишем все делители 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

Прибавим к каждому единицу: 2, 3, 4, 5, 7, 9, 13, 25.

Вычеркнем составные 4, 9 и 25; останутся простые 2, 3, 5, 7, 13.

Перемножим их: $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 = 2730$.

Ответ: 2730

Задачи

1. С помощью утверждения девятнадцать найдите знаменатель B_{20} .

Подсказка: Единица и чётные делители 20 — это 1, 2, 4, 10, 20; прибавьте к каждому единицу.

Ответ: 330: следующие числа — 2, 3, 5, 11, 21; после вычёркивания 21 остаются 2, 3, 5, 11, произведение которых 330, как и в таблице.

2. Из уравнения $B_{10} - (5/2)B_4 = -1/132$ при $B_4 = 1/30$ найдите B_{10} .

Подсказка: Пять вторых от одной тридцатой — это одна двенадцатая.

Ответ: $B_{10} = 1/12 - 1/132 = 10/132 = 5/66$.

3. Проверьте утверждение шестнадцать при $n = 4$: целое ли $2^4(2^4 - 1)B_4/4$ и нечётно ли $2(2^4 - 1)B_4$?

Подсказка: Возьмите $B_4 = 1/30$ и $2^4 - 1 = 15$.

Ответ: Да: $16 \times 15 \times (1/30) / 4 = 2$ — целое, а $2 \times 15 \times (1/30) = 1$ — нечётное целое.

Параграфы 8–11

Параграф 8.

fractional part of B_n

$$B_{16} : \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17} - 1 = \frac{47}{510}$$

$$B_{22} : 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{23} = \frac{17}{138}$$

$$B_{28} : \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{29} - 1 = \frac{59}{870}$$

Дробные части из простых чисел

Далее, взяв дробную часть любого B и разложив её на простейшие дроби, мы видим, что дробная часть B_n равна $(-1)^{(n/2)}$, умноженному на сумму чисел, обратных простым множителям знаменателя B_n , минус $(-1)^{(n/2)}$; это утверждение двадцать.

Так, дробная часть $B_{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17} - 1 = \frac{47}{510}$; дробная часть $B_{22} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{23} = \frac{17}{138}$; дробная часть $B_{28} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

$+ \frac{1}{5} + \frac{1}{29} - 1 = 59/870$; и так далее.

Параграф 9.

Из утверждения двадцать можно вывести, что если G — общий наибольший делитель, а L — общее наименьшее кратное знаменателей B_m и B_n , то L/G есть знаменатель $B_m - (-1)^{((m-n)/2)} B_n$, и, следовательно, если знаменатели B_m и B_n равны, то $B_m - (-1)^{((m-n)/2)} B_n$ — целое число; это утверждение двадцать один.

Пример: $B_{24} - B_{12}$ и $B_{32} - B_{16}$ — целые числа, а знаменатель $B_{10} + B_{20}$ равен 5.

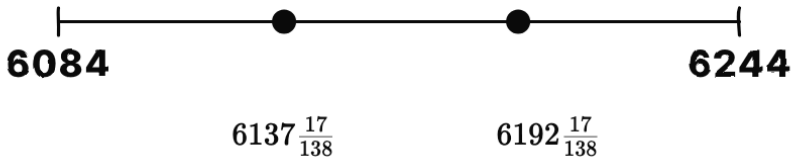
Можно заметить, что выполняется следующее. Во-первых, если n кратно 4, то числитель $B_n - 1/30$ в несократимом виде делится на 20; если же n не кратно 4, то числитель $B_n/n - 1/12$ в несократимом виде делится на 5; это утверждение двадцать два. Во-вторых, при любом целом n числа $2(2^{4n+2} - 1)B_{4n+2}/(2n + 1)$, $2(2^{8n+4} - 1)B_{8n+4}/(2n + 1)$ и $2(2^{8n+4} - 1)B_{16n+8}/(2n + 1)$ — целые числа вида $30r + 1$; это утверждение двадцать три.

Параграф 10.

$$\frac{17}{138}$$

$$11 \mid \text{top}$$

$$5 \mid B - \frac{11}{6}$$



$$B_{22} = \frac{854513}{138}$$

Определяем B_{22}

Если известно, что некоторое B лежит в определённых пределах, то по указанным свойствам можно найти его точное значение.

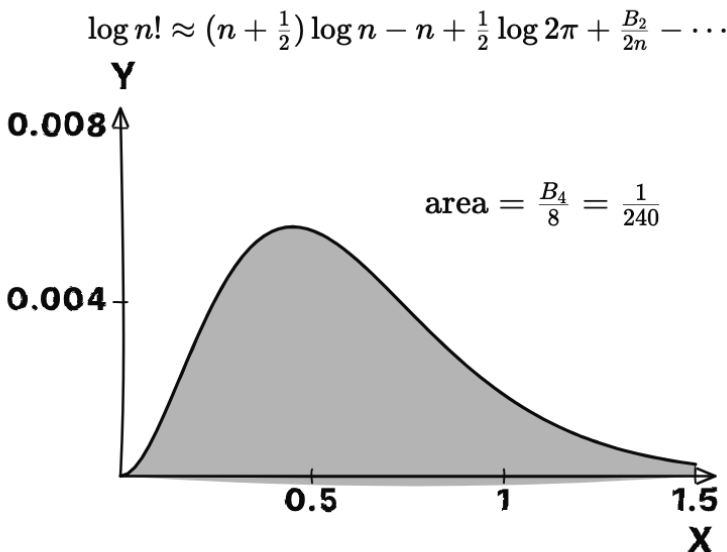
Пусть известно, что B_{22} лежит между 6084 и 6244; его точное значение можно найти так.

Дробная часть B_{22} по утверждению двадцать равна $17/138$; кроме того, B_{22} делится на 11 по утверждению восемнадцать. А по утверждению двадцать два $B_{22} - 11/6$ должно делиться на 5. Чтобы удовлетворить этим условиям, B_{22} должно быть либо $6137 \frac{17}{138}$, либо $6192 \frac{17}{138}$.

Но по утверждению восемнадцать числитель B_{22} после деления на 11 должен быть простым числом; и следовательно, B_{22} должно

равняться $6192\frac{17}{138}$, то есть $854513/138$, поскольку числитель $6137\frac{17}{138}$ делится не только на 11, но и на 7 и 17.

Параграф 11.



Площадь, равная $B_4/8$

Из «Дифференциального исчисления» Эдвардса, глава пятая, пример 29, известно, что $B_n = (2 \cdot n! / (2\pi)^n) (1/1^n + 1/2^n + 1/3^n + \dots)$, или $2 \cdot n! / (2\pi)^n = B_n (1 - 1/2^n) (1 - 1/3^n) (1 - 1/5^n) \dots$ — равенство двадцать четыре, где 2, 3, 5 и так далее — простые числа.

Кроме того, $B_n / (2n) = \int_0^\infty x^{n-1} / (e^{2\pi x} - 1) dx$ — равенство двадцать пять. Ведь $\int_0^\infty x^{n-1} / (e^{2\pi x} - 1) dx = \int_0^\infty x^{n-1} (e^{-2\pi x} + e^{-4\pi x} + \dots) dx = ((n-1)! / (2\pi)^n) (1/1^n + 1/2^n +$

$1/3^n + \dots) = B_n/(2n)$ в силу равенства двадцать четыре. Подобным же образом $\int_0^\infty x^n/(e^{(\pi x)} - e^{(-\pi x)})^2 dx = B_n/(4\pi)$, а $\int_0^\infty x^{n-2} \log(1 - e^{(-2\pi x)}) dx = -\pi B_n/(n(n-1))$ — равенство двадцать шесть.

Прологарифмируем обе части равенства двадцать четыре и запишем вместо $\log_e n!$ известное разложение $\log_e \Gamma(n+1)$, как в «Синописе» Карра, а именно $(n + 1/2) \log n - n + 1/2 \log 2\pi + B_2/(1 \cdot 2n) - B_4/(3 \cdot 4n^3) + B_6/(5 \cdot 6n^5) - \dots - (-1)^p B_{2p}\theta/((2p-1)2p n^{(2p-1)})$ — равенство двадцать семь, где тета лежит между 0 и 1.

Здесь $B_{2p}\theta/((2p-1)2p n^{(2p-1)}) = B_{2p}/((2p-1)2p n^{(2p-1)}) - B_{2p+2}/((2p+1)(2p+2)n^{(2p+1)}) + \dots$. Это равно $-(1/\pi) \int_0^\infty (x^{(2p-2)}/n^{(2p-1)}) \log(1 - e^{(-2\pi x)}) dx + (1/\pi) \int_0^\infty (x^{(2p)}/n^{(2p+1)}) \log(1 - e^{(-2\pi x)}) dx - \dots$. Собрав члены, получаем $-(1/\pi) \int_0^\infty (x^{(2p-2)}/(n^{(2p-3)}(n^2 + x^2))) \log(1 - e^{(-2\pi x)}) dx$, то есть $-\int_0^\infty x^{(2p-2)} \log(1 - e^{(-2\pi x)}) / (\pi(1 + x^2)) dx$.

Мы можем найти целую часть B_n , а поскольку дробную часть можно найти, как показано в параграфе 8, точное значение B_n становится известным. Если не заставить вычисление зависеть от значений $\log_{10} e$, $\log_e 10$, π и так далее, известных с очень большим числом знаков после запятой, нам пришлось бы искать логарифмы некоторых чисел, значения которых в таблицах не приведены с нужным нам числом знаков. Такие трудности устраняет способ, изложенный в параграфе 13.

Вопросы

1. Из чего, согласно утверждению двадцать, состоит дробная часть B_n ?
 - a. Из чисел, обратных всем делителям n
 - b. Из суммы чисел, обратных простым множителям её знаменателя, минус единица, со знаком $(-1)^{(n/2)}$
 - c. Из числителя, делённого на n
 - d. Из квадратного корня из знаменателя
2. Почему $B_{24} - B_{12}$ — целое число, согласно утверждению двадцать один?
 - a. Потому что оба — целые числа
 - b. Потому что их знаменатели равны, так что L/G равно 1
 - c. Потому что 24 вдвое больше 12
 - d. Потому что оба числителя простые
3. Какие условия в параграфе 10 сужают B_{22} до двух кандидатов?
 - a. Его дробная часть $17/138$, делимость числителя на 11 и делимость $B_{22} - 11/6$ на 5
 - b. Его значение π и его логарифм
 - c. Одна лишь таблица знаменателей
 - d. Интеграл из равенства двадцать пять
4. С чем связывает B_n равенство двадцать четыре?
 - a. С суммой чисел, обратных n -м степеням целых чисел
 - b. С количеством простых чисел меньше n
 - c. С производной $\text{ctg } x$ в нуле
 - d. С цифрами числа π

Ответы

1. **b)** Если разложить дробную часть на простейшие дроби, она равна $(-1)^{(n/2)}$, умноженному на сумму чисел, обратных простым множителям знаменателя, минус $(-1)^{(n/2)}$.
2. **b)** Если знаменатели B_m и B_n равны, то $B_m - (-1)^{((m-n)/2)} B_n$ — целое число; у B_{24} и B_{12} общий знаменатель 2730.
3. **a)** Дробная часть по утверждению двадцать равна $17/138$, числитель по утверждению восемнадцать делится на 11, а $B_{22} - 11/6$ по утверждению двадцать два должно делиться на 5.
4. **a)** $B_n = (2 \cdot n! / (2\pi)^n) (1/1^n + 1/2^n + 1/3^n + \dots)$, а это можно записать и как произведение по простым числам.

Разобранные примеры

Находим B_{22} по пределам Пусть B_{22} лежит между 6084 и 6244. С помощью дробной части $17/138$, делимости числителя на 11 и правила, что $B_{22} - 11/6$ делится на 5, найдите кандидатов.

Запишем $B_{22} = k + 17/138$, где k — целое число от 6084 до 6243; его числитель равен $138k + 17$.

Оставим только те k , при которых $138k + 17$ делится на 11, а числитель $B_{22} - 11/6$ делится на 5.

Остаются ровно два: $k = 6137$ и $k = 6192$.

Затем книга отбрасывает $6137 \cdot 17/138$, чей числитель 846923 делится не только на 11, но и на 7 и 17, и оставляет $6192 \cdot 17/138 = 854513/138$.

Ответ: $B_{22} = 854513/138$, как в таблице

Задачи

1. Проверьте утверждение двадцать для $B_{16} = 3617/510$: вычислите $1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/17 - 1$ и сравните с дробной частью B_{16} .

Подсказка: Приведите всё к знаменателю 510.

Ответ: $(255 + 170 + 102 + 30 - 510)/510 = 47/510$, а $3617/510 = 7 + 47/510$, так что они совпадают.

2. Проверьте утверждение двадцать два при $n = 12$: делится ли числитель $B_{12} - 1/30$ на 20?

Подсказка: Запишите $1/30$ как $91/2730$.

Ответ: Да: $691/2730 - 91/2730 = 600/2730 = 20/91$, и числитель равен 20.

3. Проверьте первое выражение утверждения двадцать три при $n = 1$: имеет ли $2(2^6 - 1)B_6/3$ вид $30r + 1$?

Подсказка: Возьмите $B_6 = 1/42$ и $2^6 - 1 = 63$.

Ответ: Да: $2 \times 63 \times (1/42)/3 = 1$, то есть $30 \times 0 + 1$.

Параграф 12

Результаты с четырнадцатого по семнадцатый, двадцатый и двадцать первый можно получить следующим образом. Имеем $1/(2x^2) + 1/(x+1)^2 + 1/(x+2)^2 + 1/(x+3)^2 + 1/(x+4)^2 + \dots - 1/x - 1/(6(x^3-x)) + 1/(5(x^5-x)) + 1/(7(x^7-x)) + 1/(11(x^{11}-x)) + \dots = 1/x^{15} - 7/x^{17} + 55/x^{19} - 529/x^{21} + \dots$ — равенство двадцать восемь, где 5, 7, 11, 13 и так далее — простые числа больше 3. Если мы сможем доказать, что левую часть равенства двадцать восемь можно разложить по возрастающим степеням $1/x$ с целыми коэффициентами, то утверждения двадцать и двадцать один сразу выводятся следующим образом.

ЕСЛИ ДОКАЖЕМ

ЛЕВАЯ ЧАСТЬ (28)



ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА?

$$\frac{1}{x^{15}} - \frac{7}{x^{17}} + \frac{55}{x^{19}} - \frac{529}{x^{21}} + \dots$$

Одно утверждение о ряде

Из равенства двадцать семь имеем $d^2 \log \Gamma(n+1)/dn^2 = 1/(n+1)^2 + 1/(n+2)^2 + 1/(n+3)^2 + \dots = 1/n - 1/(2n^2) + B_2/n^3 - B_4/n^5 + B_6/n^7 - B_8/n^9 + \dots - (-1)^p B_{2p}/n^{(2p+1)}$ — равенство двадцать девять.

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{(n+k)^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{B_2}{n^3} - \frac{B_4}{n^5} + \dots$$

$$\text{rest} = \int_0^\infty \frac{\pi x^{2p} dx}{(1+x^2) \sinh^2 \pi n x}$$

ЦЕЛЫЕ; ЗДЕСЬ ВСЕ В > 0

$$B_2 - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$$

$$-B_4 - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = -\frac{1}{30} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = 0$$

$$B_6 - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{1}{42} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = 0$$

$$-B_8 - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = -\frac{1}{30} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = 0$$

$$B_{10} - \frac{1}{6} + \frac{1}{11} = \frac{5}{66} - \frac{1}{6} + \frac{1}{11} = 0$$

$$-\frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1$$

Коэффициенты, которые обязаны быть целыми

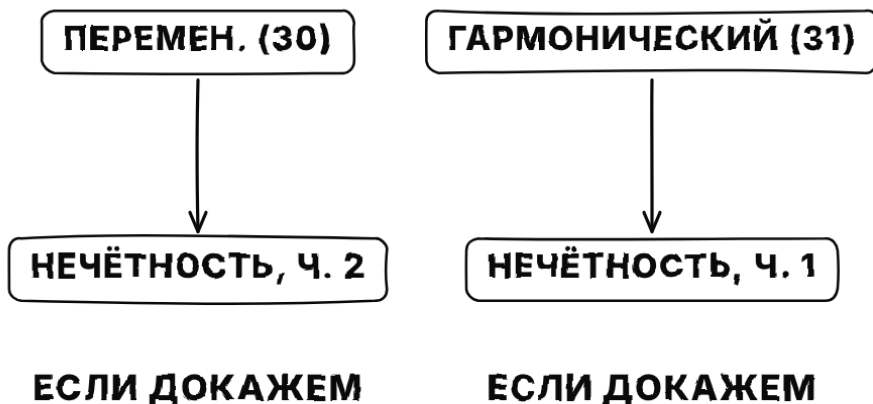
Здесь $B_{2p}\theta/n^{(2p+1)} = B_{2p}/n^{(2p+1)} - B_{2p+2}/n^{(2p+3)} + \dots$. Это равно $4\pi \int_0^\infty x^{(2p)}/(n^{(2p+1)}(e^{(\pi x)} - e^{(-\pi x)})^2) dx - 4\pi \int_0^\infty x^{(2p+2)}/(n^{(2p+3)}(e^{(\pi x)} - e^{(-\pi x)})^2) dx + \dots$. То есть $\pi \int_0^\infty (x^{(2p)}/n^{(2p+1)} - x^{(2p+2)}/n^{(2p+3)} + \dots) dx / \text{sh}^2 \pi x$. А это $\pi \int_0^\infty x^{(2p)}/(n^{(2p-1)}(n^2 + x^2)) dx / \text{sh}^2 \pi x = \int_0^\infty \pi x^{(2p)} / ((1 + x^2) \text{sh}^2 \pi n x) dx$.

Подставляя результат равенства двадцать девять в равенство двадцать восемь, мы видим, что $B_2/x^3 - B_4/x^5 + B_6/x^7 - \dots - 1/(6(x^3 - x)) + 1/(5(x^5 - x)) + 1/(7(x^7 - x)) + 1/(11(x^{11} - x)) + \dots$, где 5, 7, 11 и так далее — простые числа, можно разложить по возрастающим степеням $1/x$ с целыми коэффициентами.

Следовательно, $B_2 = \frac{1}{6}$, $-B_4 = \frac{1}{6} + \frac{1}{5}$, $B_6 = \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$, $-B_8 = \frac{1}{6} + \frac{1}{5}$, $B_{10} = \frac{1}{6} + \frac{1}{11}$ и так далее, то есть коэффициенты при $1/x^3$, $1/x^5$, $1/x^7$ и так далее, — целые числа.

Записав $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1$ вместо $-\frac{1}{6}$, получаем результаты утверждений двадцать и двадцать один.

Далее, заменив n на $\frac{1}{2}n$ в равенстве двадцать девять и вычтя половину результата из равенства двадцать девять, получаем $1/(n+1)^2 - 1/(n+2)^2 + 1/(n+3)^2 - \dots = 1/(2n^2) - (2^2 - 1)B_2/n^3 + (2^4 - 1)B_4/n^5 - (2^6 - 1)B_6/n^7 + \dots + (-1)^p (2^{2p} - 1)B_{2p}\theta/n^{2p+1} -$ равенство тридцать, где θ лежит между 0 и 1, и, кроме того, в силу равенства двадцать девять, $(2^{2p} - 1)B_{2p}\theta/n^{2p+1} = \int_0^\infty \frac{\pi x^{2p} \operatorname{ch} \pi x}{(1+x^2) \operatorname{sh}^2 \pi x} dx$.



Ещё два пути — тот же пробел

Итак, мы видим, что если мы сможем доказать, что удвоенную левую часть равенства тридцать можно разложить по возрастающим степеням $1/n$ с целыми коэффициентами, то вторая часть утверждения шестнадцать сразу доказана.

Далее, из равенства двадцать семь имеем $d \log \Gamma(n+1)/dn = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots + 1/n - \gamma = \log n + 1/(2n) - B_2/(2n^2) + B_4/(4n^4) - B_6/(6n^6) + B_8/(8n^8) - \dots + (-1)^p B_{2p}\theta/(2p n^{2p})$ — равенство тридцать один, где тета лежит между 0 и 1; и, кроме того, в силу равенства двадцать пять, $B_{2p}\theta/(2p n^{2p}) = \int_0^\infty 2x^{2p-1}/((1+x^2)(e^{2\pi nx} - 1)) dx$, откуда легко показать, что $1/(n+2) - 1/(n+4) + 1/(n+6) - 1/(n+8) + 1/(n+10) - \dots = 1/(2n) - 2(2^2 - 1)B_2/(2n^2) + 2^3(2^4 - 1)B_4/(4n^4) - 2^5(2^6 - 1)B_6/(6n^6) + \dots + (-1)^p$

$2^{(2p-1)}(2^{(2p)} - 1)B_{2p}\theta/(2p \cdot n^{(2p)}) - \dots$ — равенство тридцать два, где θ лежит между 0 и 1; и, кроме того, в силу равенства тридцать один, $2^{(2p-1)}(2^{(2p)} - 1)B_{2p}\theta/(2p \cdot n^{(2p)}) = \int_0^\infty x^{(2p-1)}/(2(1+x^2) \operatorname{sh}(\frac{1}{2} \ln x)) dx$.

Из приведённой теоремы мы видим, что если мы сможем доказать, что $2(1/(n+2) - 1/(n+4) + 1/(n+6) - \dots)$ можно разложить по возрастающим степеням $1/n$ с целыми коэффициентами, то первая часть утверждения шестнадцать сразу следует.

Вопросы

1. От какого единственного утверждения Рамануджан ставит в зависимость утверждения двадцать и двадцать один в параграфе 12?
 - а. Что левую часть равенства двадцать восемь можно разложить по возрастающим степеням $1/x$ с целыми коэффициентами
 - б. Что все числа Бернулли целые
 - с. Что π иррационально
 - д. Что у равенства двенадцать нет решения
2. Какие величины, по заключению Рамануджана, — целые числа?
 - а. $B_2 - \frac{1}{6}$, $-B_4 - \frac{1}{6} + \frac{1}{5}$, $B_6 - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ и так далее — коэффициенты при $1/x^3$, $1/x^5$, $1/x^7$
 - б. Сами числа Бернулли

с. Значения θ

d. Интегралы из равенства двадцать пять

3. Что, согласно параграфу 12, доказало бы вторую часть утверждения шестнадцать?

a. Что удвоенную левую часть равенства тридцать можно разложить по возрастающим степеням $1/n$ с целыми коэффициентами

b. Что выполняется равенство двадцать четыре

с. Что знаменатель каждого B равен 6

d. Что ряд в равенстве тридцать два сходится

Ответы

1. a) Если мы сможем доказать, что левую часть равенства двадцать восемь можно разложить по возрастающим степеням $1/x$ с целыми коэффициентами, то утверждения двадцать и двадцать один сразу выводятся.

2. a) Следовательно, $B_2 - \frac{1}{6}$, $-B_4 - \frac{1}{6} + \frac{1}{5}$, $B_6 - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$, ..., то есть коэффициенты при $1/x^3$, $1/x^5$, $1/x^7$, ..., — целые числа.

3. a) Если мы сможем доказать, что удвоенную левую часть равенства тридцать можно разложить по возрастающим степеням $1/n$ с целыми коэффициентами, то вторая часть утверждения шестнадцать сразу доказана.

Разобранные примеры

Целые коэффициенты для малых номеров Проверьте, что коэффициенты $-B_4 - \frac{1}{6} + \frac{1}{5}$ и $B_{14} - \frac{1}{6}$ целые, взяв $B_4 = 1/30$ и $B_{14} = 7/6$.

Приведём $-B_4 - \frac{1}{6} + \frac{1}{5}$ к знаменателю 30: $-1/30 - 5/30 + 6/30$.

Сумма равна $0/30 = 0$ — целое число.

Для $B_{14} - 1/6$: $7/6 - 1/6 = 6/6$.

Это 1 — целое число, и оно совпадает с первым членом $1/x^{15}$ в правой части равенства двадцать восемь.

Ответ: Оба целые: 0 и 1.

Задачи

1. Проверьте, что $B_6 - 1/6 + 1/7$ — целое число, при $B_6 = 1/42$.

Подсказка: Приведите всё к знаменателю 42.

Ответ: $1/42 - 7/42 + 6/42 = 0$ — целое.

2. Проверьте, что $B_{10} - 1/6 + 1/11$ — целое число, при $B_{10} = 5/66$.

Подсказка: Приведите всё к знаменателю 66.

Ответ: $5/66 - 11/66 + 6/66 = 0$ — целое.

3. Почему запись $1/2 + 1/3 - 1$ вместо $-1/6$ превращает эти целые коэффициенты в утверждение двадцать?

Подсказка: Посмотрите, какие простые числа входят в каждый коэффициент.

Ответ: Каждый коэффициент — это $\pm B_n$ плюс сумма чисел, обратных простым: $1/2$ и $1/3$ из $-1/6$ и $1/5$, $1/7$, $1/11$ и так далее из остальных членов. Сказать, что это целое число, — значит сказать, что дробная часть B_n равна $\pm$ сумме этих обратных величин минус единица, а это и есть утверждение двадцать.

Параграфы 13–15

Параграф 13.

СКОЛЬКО ЦИФР?

$$\log_{10} B_n \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \log_{10} n - 1.2324743503 n + 0.700120$$

$$\text{true value} \approx \dots + \frac{0.0362}{n}$$

$$\log_e B_n \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \log_e n - n(1 + \log_e 2\pi) + \frac{1}{2} \log_e 8\pi$$

$$\times \log_{10} e = 0.4342944819$$

$$n = 20 : \quad 2.7218 + 0.0018 = 2.7236 \approx \log_{10} 529.12$$

Считаем цифры

Первые несколько цифр, а также число цифр в целой части и в числителе B_n можно найти по приближённой формуле $\log_{10} B_n = (n + 1/2) \log_{10} n - 1,2324743503 n + 0,700120$, причём при больших n истинное значение больше примерно на $0,0362/n$; это результат тридцать три.

Эта формула доказывается так: логарифмируя обе части равенства двадцать четыре, получаем приблизительно $\log_e B_n = (n$

$+ \frac{1}{2}) \log_e n - n(1 + \log_e 2\pi) + \frac{1}{2} \log_e 8\pi$. Умножая обе части на $\log_{10} e$, то есть на 0,4342944819, и упрощая, можно получить результат.

Параграф 14.

$$\frac{B_n}{B_{n-2}} \rightarrow \frac{n(n-1)}{4\pi^2}$$

$$\pi = 3.14159\,26535\,89793\dots$$

rough ratio $\Rightarrow$ between $\Rightarrow$ exact

$$B_{12} \in (0, 1) : \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13} - 1 = \frac{691}{2730}$$

$$B_{14} \in (0, 2) : 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$$

$$B_{16} \in (7, 8) : 6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17} = \frac{3617}{510}$$

$$B_{18} \in (54, 55) : 56 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{19} = \frac{43867}{798}$$

$$B_{20} \in (529, 530) : 528 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{11} = \frac{174611}{330}$$

Каждое B по предыдущему

Заменяя n на $n - 2$ в равенстве двадцать четыре и взяв отношение двух результатов, получаем $B_n = (n(n-1)/(4\pi^2)) B_{n-2}$
 $(1 - (2^2 - 1)/(2^n - 1))(1 - (3^2 - 1)/(3^n - 1))(1 - (5^2 - 1)/(5^n - 1))\dots$ —
 равенство тридцать четыре, где 2, 3, 5 и так далее — простые числа.

Отсюда видно, что B_n/B_{n-2} очень быстро стремится к $n(n-1)/(4\pi^2)$ с ростом n ; это результат тридцать пять.

Зная значение π , а именно 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 и так далее, целую часть любого B можно найти по предыдущему B , а по целой части точное значение сразу записывается с помощью утверждения двадцать, как показано ниже. Таблица даёт для каждого B приближённое отношение к предыдущему B , два целых числа, между которыми оно лежит, найденные грубым расчётом по предыдущему B , и отсюда его точное значение.

B_2 лежит между 0 и 1, так что оно равно $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. $B_4 = (3 \cdot 4 / (4\pi^2))$ B_2 лежит между 0 и 1, так что оно равно $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - 1 = \frac{1}{30}$. $B_6 = (5 \cdot 6 / (4\pi^2))$ B_4 лежит между 0 и 1, так что оно равно $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$. $B_8 = (7 \cdot 8 / (4\pi^2))$ B_6 лежит между 0 и 1, так что оно равно $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - 1 = \frac{1}{30}$. $B_{10} = (9 \cdot 10 / (4\pi^2))$ B_8 лежит между 0 и 1, так что оно равно $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{11} = \frac{5}{66}$. $B_{12} = (11 \cdot 12 / (4\pi^2))$ B_{10} лежит между 0 и 1, так что оно равно $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13} - 1 = \frac{691}{2730}$. $B_{14} = (13 \cdot 14 / (4\pi^2))$ B_{12} лежит между 0 и 2, так что оно равно $2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$. $B_{16} = (15 \cdot 16 / (4\pi^2))$ B_{14} лежит между 7 и 8, так что оно равно $6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17} = \frac{3617}{510}$. $B_{18} = (17 \cdot 18 / (4\pi^2))$ B_{16} лежит между 54 и 55, так что оно равно $56 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{19} = \frac{43867}{798}$. $B_{20} = (19 \cdot 20 / (4\pi^2))$ B_{18} лежит между 529 и 530, так что оно равно $528 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{11} = \frac{174611}{330}$; и так далее.

Параграф 15.

$$B_{444} = \frac{N}{D}$$

$$\text{fraction} = 23975417/90709710$$

$$N = 37 \times \text{prime}$$

$$\log_{10} B_{444} \approx 630.2433$$

ЦЕЛАЯ ЧАСТЬ: 631 ЦИФРА, 1751...

$$\log_{10} N \approx 630.2433 + \log_{10} 90709710 = 638.2010$$

N: 639 ЦИФР, 1588...

$$[B_{444}] + \frac{698392}{3023657} : 20 \mid \text{top}$$

$$[B_{444}] \text{ ends } \dots e4, e \text{ even}$$

$$N \text{ ends } \dots e57, e \text{ even}$$

B444, не выписывая его

Из предыдущих теорем мы знаем некоторые свойства B_n при всех положительных чётных n . Возьмём для примера $B_{444} = N/D$.

Дробная часть B_{444} по утверждению двадцать равна $23975417/90709710$. Числитель B_{444} делится на 37, и частное по утверждению восемнадцать — простое число. Далее, $\log_{10} B_{444} = 630,2433$ приблизительно, по результату тридцать три.

Следовательно, целая часть B_{444} содержит 631 цифру, и первые 4 цифры — 1751. Далее, $\log_{10} N = \log_{10} B_{444} + \log_{10} D = 630,2433 + \log_{10} 90709710 = 638,2010$ приблизительно. Следовательно, N содержит 639 цифр, и первые четыре цифры — 1588.

Далее, числитель $B_{444} - 1/30$ делится на 20; иначе говоря, если $[B_{444}]$ — целая часть B_{444} , то у $[B_{444}] + 23975417/90709710 - 1/30 = [B_{444}] + 698392/3023657$ числитель делится на 20.

Следовательно, целая часть B_{444} кончается на 4, а предпоследняя цифра чётна.

Отсюда N кончается на 57, а третья цифра от конца чётна.

Вопросы

1. Для чего можно использовать результат тридцать три?
 - a. Чтобы найти первые несколько цифр и число цифр B_n и его числителя
 - b. Чтобы точно найти знаменатель B_n
 - c. Чтобы доказать утверждение четырнадцать
 - d. Чтобы вычислить π
2. Что говорит результат тридцать пять об отношении B_n/B_{n-2} ?
 - a. Оно очень быстро стремится к $n(n-1)/(4\pi^2)$ с ростом n
 - b. Оно всегда равно 1
 - c. Оно стремится к π
 - d. Оно убывает до нуля
3. Как Рамануджан получает точное значение B , зная два целых числа, между которыми оно лежит?
 - a. Прибавляет дробную часть, которую даёт утверждение двадцать

- b. Усредняет два числа
 - c. Пользуется одной лишь таблицей знаменателей
 - d. Умножает на π
4. Что заключает параграф 15 о последних цифрах N , числителя B_{444} ?
- a. N кончается на 57, а третья цифра от конца чётна
 - b. N кончается на 00
 - c. N — простое число, оканчивающееся на 1
 - d. Ничего сказать нельзя

Ответы

1. a) Первые несколько цифр, а также число цифр в целой части и в числителе B_n можно найти по приближённой формуле для $\log_{10} B_n$.
2. a) Из равенства тридцать четыре B_n/B_{n-2} очень быстро стремится к $n(n-1)/(4\pi^2)$ с ростом n .
3. a) По целой части точное значение сразу записывается с помощью утверждения двадцать, которое даёт дробную часть.
4. a) Отсюда N кончается на 57, а третья цифра от конца чётна.

Разобранные примеры

B_{16} по B_{14} С помощью отношения $(15 \cdot 16 / (4\pi^2))$ и $B_{14} = 7/6$ найдите два целых числа, между которыми лежит B_{16} , а затем его точное значение по простым 2, 3, 5, 17 его знаменателя.

$4\pi^2$ примерно равно 39,478, так что $15 \times 16 / (4\pi^2) = 240 / 39,478$, около 6,079.

Умножение на $B_{14} = 7/6$, около 1,1667, даёт около 7,09, так что B_{16} лежит между 7 и 8.

Половина 16 чётна, так что дробная часть равна $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17} - 1 = 47/510$.

Значит, $B_{16} = 7 + 47/510 = 6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17} = 3617/510$.

Ответ: $B_{16} = 3617/510$

Задачи

1. С помощью отношения $17 \cdot 18 / (4\pi^2)$ и $B_{16} = 3617/510$ (около 7,092) найдите целые числа, между которыми лежит B_{18} .

Подсказка: $17 \times 18 = 306$, а $4\pi^2$ примерно равно 39,478.

Ответ: $306/39,478$ — около 7,751, а $7,751 \times 7,092$ — около 54,97, так что B_{18} лежит между 54 и 55, как в таблице.

2. С помощью результата тридцать три оцените $\log_{10} B_{20}$ и сравните с истинным значением $\log_{10}(174611/330) = 2,72356$.

Подсказка: Вычислите $20,5 \times \log_{10} 20 - 1,2324743503 \times 20 + 0,700120$, где $\log_{10} 20 = 1,30103$.

Ответ: $26,67112 - 24,64949 + 0,70012 = 2,72175$; истинное значение больше примерно на 0,0018, что близко к $0,0362/20 = 0,0018$, как и говорит результат тридцать три.

Параграфы 16 и 17

Параграф 16.

CTG X

TG X

COSEC X



(36)

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} B_n(2^n - 1) = c_6 B_{n-6}(2^{n-6} - 1) - c_{12} B_{n-12}(2^{n-12} - 1) + \dots \\ + \frac{1}{3} n(-1)^{\frac{n-2}{6}} \text{ or } \frac{1}{6} n(-1)^{\frac{n-4}{6}} \text{ or } \frac{1}{3} n(-1)^{\frac{n-6}{6}} \end{aligned}$$

(37)

$$\begin{aligned} c_3 \left(1 - \frac{1}{2^{n-4}}\right) B_{n-3} - c_9 \left(1 - \frac{1}{2^{n-10}}\right) B_{n-9} + c_{15} \left(1 - \frac{1}{2^{n-16}}\right) B_{n-15} - \dots \\ = \frac{2}{3} \cdot \frac{n}{2^n} \left(3^{\frac{n-1}{2}} + (-1)^{\frac{n-3}{6}} \text{ or } (-1)^{\frac{n+1}{6}} \text{ or } (-1)^{\frac{n+5}{6}}\right) \end{aligned}$$

Начиная с tg и cosec

Вместо того чтобы начинать с ctg x, как в параграфах 2 и 3, можно начать с tg x или cosec x и получить другие похожие результаты.

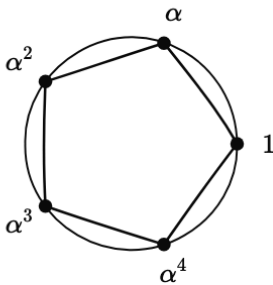
Так, во-первых, $(4/3)B_n(2^n - 1) = c_6 B_{n-6}(2^{n-6} - 1) - c_{12} B_{n-12}(2^{n-12} - 1) + \dots + \frac{1}{3}n(-1)^{((n-2)/6)}$, или $\frac{1}{6}n(-1)^{((n-4)/6)}$, или $\frac{1}{3}n(-1)^{((n-6)/6)}$ — равенство тридцать шесть.

Во-вторых, $c_3(1 - 1/2^{n-4})B_{n-3} - c_9(1 - 1/2^{n-10})B_{n-9} + c_{15}(1 - 1/2^{n-16})B_{n-15} - \dots = (2/3)(n/2^n)(3^{((n-1)/2)} + (-1)^{((n-3)/6)})$, или $(-1)^{((n+1)/6)}$, или $(-1)^{((n+5)/6)})$ — равенство тридцать семь.

Параграф 17.

ИНТЕРВАЛ 1 ИНТЕРВАЛ 2 ИНТЕРВАЛ 3

$$\omega^p = 1 \text{ or } \omega^p = i$$



$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{k=0}^4 \sin x \alpha^k \\ &= 5 \left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^{15}}{15!} + \frac{x^{25}}{25!} - \dots \right) \end{aligned}$$

$$16 \prod_{k=0}^4 \sin x \alpha^k$$

$$= \varphi(2x) + \varphi(x(1 + \sqrt{5})) + \varphi(x(1 - \sqrt{5}))$$

Пять корней из единицы

Формулы, полученные в параграфах 1, 3 и 4, можно назвать соответственно формулами с интервалом один, два и три.

Формулы с интервалом p можно получить, взяв корни степени p из единицы или из i , смотря по тому, нечётно p или чётно.

Возьмём, например, корни пятой степени из единицы $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ и найдём формулы с интервалом 5.

Пусть $\varphi(x) = \sin x + \sin x\alpha + \sin x\alpha^2 + \sin x\alpha^3 + \sin x\alpha^4 = 5(x^5/5! - x^{15}/15! + x^{25}/25! - \dots)$.

Тогда легко показать, что $16 \sin x \sin x\alpha \sin x\alpha^2 \sin x\alpha^3 \sin x\alpha^4 = \varphi(2x) - \varphi(2x(\alpha + \alpha^4)) - \varphi(2x(\alpha^2 + \alpha^3)) = \varphi(2x) + \varphi(x(1 + \sqrt{5})) + \varphi(x(1 - \sqrt{5}))$.

Логарифмируя и дифференцируя обе части, получаем $5(B_0 + B_{10}x^{10}/10! + B_{20}x^{20}/20! + B_{30}x^{30}/30! + \dots) = -x((x^4/4!)(1 + \alpha_5) - (x^{14}/14!)(1 + \alpha_{15}) + \dots) / ((x^5/5!)(1 + \alpha_5) - (x^{15}/15!)(1 + \alpha_{15}) + \dots) -$ равенство тридцать восемь, где $\alpha_n = ((1 + \sqrt{5})/2)^n + ((1 - \sqrt{5})/2)^n$, так что $\alpha_n\alpha_m = \alpha_{n+m} + (-1)^n\alpha_{m-n}$.

$$\begin{array}{ccccccc} \odot & \odot & \odot & \bullet & \bullet & \odot & \odot & \odot & \bullet & \bullet & \odot & \odot & \odot & \bullet & \bullet \\ & & B_4 & & & & B_{14} & & & & & B_{24} & & & \end{array}$$

$$5\left(B_0 + \frac{B_{10}x^{10}}{10!} + \frac{B_{20}x^{20}}{20!} + \dots\right) \quad (38)$$

$$= -x \frac{\frac{x^4}{4!}(1 + \alpha_5) - \frac{x^{14}}{14!}(1 + \alpha_{15}) + \dots}{\frac{x^5}{5!}(1 + \alpha_5) - \frac{x^{15}}{15!}(1 + \alpha_{15}) + \dots}$$

$$\alpha_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$5\left(\frac{B_2x^2}{2!} + \frac{B_{12}x^{12}}{12!} + \dots\right) = x \frac{\frac{x^6}{6!}(1 + \alpha_7) - \dots}{\frac{x^5}{5!}(1 + \alpha_5) - \dots} \quad (39)$$

$$5\left(\frac{B_4x^4}{4!} + \frac{B_{14}x^{14}}{14!} + \dots\right) = x \frac{\frac{x^8}{8!}(\alpha_7 - 1) - \dots}{\frac{x^5}{5!}(1 + \alpha_5) - \dots} \quad (40)$$

По нити на формулу

Аналогично, во-первых, $5(B_2x^2/2! + B_{12}x^{12}/12! + B_{22}x^{22}/22! + \dots)$
 $= x ((x^6/6!)(1 + \alpha_7) - (x^{16}/16!)(1 + \alpha_{17}) + \dots) / ((x^5/5!)(1 + \alpha_5) -$
 $(x^{15}/15!)(1 + \alpha_{15}) + \dots)$ — равенство тридцать девять.

Во-вторых, $5(B_4x^4/4! + B_{14}x^{14}/14! + B_{24}x^{24}/24! + \dots) = x ((x^8/8!)$
 $(\alpha_7 - 1) - (x^{18}/18!)(\alpha_{17} - 1) + \dots) / ((x^5/5!)(1 + \alpha_5) - (x^{15}/15!)(1 +$
 $\alpha_{15}) + \dots)$ — равенство сорок.

В-третьих, $10(B_6x^6/6! + B_{16}x^{16}/16! + B_{26}x^{26}/26! + \dots) = x$
 $((x^{10}/10!)(\alpha_{10} - 3) - (x^{20}/20!)(\alpha_{20} - 3) + (x^{30}/30!)(\alpha_{30} - 3) - \dots) /$
 $((x^5/5!)(1 + \alpha_5) - (x^{15}/15!)(1 + \alpha_{15}) + (x^{25}/25!)(1 + \alpha_{25}) - \dots)$ —
 равенство сорок один.



$$10\left(\frac{B_6x^6}{6!} + \frac{B_{16}x^{16}}{16!} + \dots\right) = x \frac{\frac{x^{10}}{10!}(\alpha_{10} - 3) - \dots}{\frac{x^5}{5!}(1 + \alpha_5) - \dots} \quad (41)$$

$$5\left(\frac{B_8x^8}{8!} + \frac{B_{18}x^{18}}{18!} + \dots\right) = x \frac{\frac{x^{12}}{12!}(\alpha_{11} - 1) - \dots}{\frac{x^5}{5!}(1 + \alpha_5) - \dots} \quad (42)$$

ПЯТЬ НИТЕЙ

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^4 \cos x \alpha^k = 5\left(1 - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{20}}{20!} - \dots\right)$$

ЕЩЁ МНОГО ТОЖДЕСТВ

Остальные нити и косинусы

В-четвёртых, $5(B_8x^8/8! + B_{18}x^{18}/18! + B_{28}x^{28}/28! + \dots) = x$
 $((x^{12}/12!)(\alpha_{11} - 1) - (x^{22}/22!)(\alpha_{21} - 1) + (x^{32}/32!)(\alpha_{31} - 1) - \dots) /$
 $((x^5/5!)(1 + \alpha_5) - (x^{15}/15!)(1 + \alpha_{15}) + (x^{25}/25!)(1 + \alpha_{25}) - \dots) -$
 равенство сорок два.

Далее, из $16 \cos x \cos \alpha \cos \alpha^2 \cos \alpha^3 \cos \alpha^4 = 1 + \psi(2x) +$
 $\psi(2x(\alpha + \alpha^4)) + \psi(2x(\alpha^2 + \alpha^3))$, где $\psi(x) = \cos x + \cos \alpha x + \cos \alpha x^2 +$
 $\cos \alpha x^3 + \cos \alpha x^4 = 5(1 - x^{10}/10! + x^{20}/20! - x^{30}/30! + \dots)$, и
 подобных соотношений можно получить множество других
 тождеств.

Вопросы

1. Что, по параграфу 16, может заменить котангенс в качестве отправной точки?
 - a. Тангенс или косеканс
 - b. Логарифм
 - c. Только экспонента
 - d. Квадратный корень
2. Как, согласно параграфу 17, получаются формулы с интервалом p ?
 - a. Взяв корни степени p из единицы или из i , смотря по тому, нечётно p или чётно
 - b. Возведя формулу с интервалом один в квадрат p раз
 - c. Разделив на p
 - d. Используя p разных простых чисел

3. Какие числа Бернулли стоят в левой части равенства тридцать восемь?

a. $B_0, B_{10}, B_{20}, B_{30}, \dots$ — каждое десятое

b. Все

c. Только с нечётными номерами

d. Только B_2, B_4, B_6

Ответы

1. а) Вместо того чтобы начинать с $\operatorname{ctg} x$, как в параграфах 2 и 3, можно начать с $\operatorname{tg} x$ или $\operatorname{cosec} x$ и получить другие похожие результаты.

2. а) Формулы с интервалом p можно получить, взяв корни степени p из единицы или из i , смотря по тому, нечётно p или чётно.

3. а) В левой части равенства тридцать восемь стоит $5(B_0 + B_{10}x^{10}/10! + B_{20}x^{20}/20! + B_{30}x^{30}/30! + \dots)$.

Разобранные примеры

Равенство тридцать шесть при $n = 6$ Проверьте равенство тридцать шесть при $n = 6$, когда правая часть сводится к $s_6 B_0(2^0 - 1)$ плюс последний член $\frac{1}{3}n(-1)^{(n-6)/6}$. Возьмите $B_6 = 1/42$.

Левая часть равна $(4/3) \times (1/42) \times (2^6 - 1) = (4/3) \times 63/42$.

$63/42 = 3/2$, так что левая часть равна $(4/3) \times (3/2) = 2$.

Справа $s_6 B_0(2^0 - 1) = 0$, потому что $2^0 - 1 = 0$.

Последний член равен $\frac{1}{3} \times 6 \times (-1)^0 = 2$, так что обе части равны 2.

Ответ: Обе части равны 2

Задачи

1. Числа $\alpha_n = ((1 + \sqrt{5})/2)^n + ((1 - \sqrt{5})/2)^n$ — целые. Найдите α_1 , α_2 и α_5 .

Подсказка: Воспользуйтесь $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \alpha_{n-1}$.

Ответ: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 3$, далее 4, 7, 11, так что $\alpha_5 = 11$.

2. Проверьте старший член равенства тридцать восемь: чему при малом x равно $-x ((x^4/4!)(1 + \alpha_5)) / ((x^5/5!)(1 + \alpha_5))$ и что это говорит о V_0 ?

Подсказка: Множители $1 + \alpha_5$ сокращаются.

Ответ: Это $-x (x^4/24)/(x^5/120) = -5$, а левая часть начинается с $5V_0$, так что $V_0 = -1$.

3. Проверьте старший член равенства тридцать девять при $\alpha_5 = 11$ и $\alpha_7 = 29$.

Подсказка: Сравните $x (x^6/720)(30) / ((x^5/120)(12))$ с $5B_2x^2/2$.

Ответ: Правая часть равна $x^2 \times (30/720)/(12/120) = 5x^2/12$, а $5B_2x^2/2 = 5x^2/12$ даёт $B_2 = 1/6$.

Параграф 18 и примечание редакторов

Параграф 18.

ЧЕТЫРЕ ШАГА

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

$$a_{m+n} = a_m a_n - a_{m-n}/2^n$$

$$b_{m+n} = a_m b_n + b_{m-n}/2^n$$

$$4\left(B_0 + \frac{B_8 x^8}{8!} + \frac{B_{16} x^{16}}{16!} + \frac{B_{24} x^{24}}{24!} + \dots\right) \quad (43)$$

$$= -x \frac{\frac{x^3}{3!} a_2 - \frac{x^{11}}{11!} a_6 + \frac{x^{19}}{19!} a_{10} - \dots}{\frac{x^4}{4!} a_2 - \frac{x^{12}}{12!} a_6 + \frac{x^{20}}{20!} a_{10} - \dots}$$

Помощники на корне из двух

Четыре формулы с интервалом можно получить из следующих тождеств.

Если $a_n = (1 + 1/\sqrt{2})^n + (1 - 1/\sqrt{2})^n$ и $b_n = (1 + 1/\sqrt{2})^n - (1 - 1/\sqrt{2})^n$, так что $a_{m+n} = a_m a_n - a_{m-n}/2^n$ и $b_{m+n} = a_m b_n + b_{m-n}/2^n$, то верно следующее.

Первое: $4(B_0 + B_8x^8/8! + B_{16}x^{16}/16! + B_{24}x^{24}/24! + \dots) = -x$
 $((x^3/3!)a_2 - (x^{11}/11!)a_6 + (x^{19}/19!)a_{10} - \dots) / ((x^4/4!)a_2 -$
 $(x^{12}/12!)a_6 + (x^{20}/20!)a_{10} - \dots)$, равенство сорок три.

Второе: $4(B_2x^2/2! + B_{10}x^{10}/10! + B_{18}x^{18}/18! + \dots) = -x$ $((x^5/5!)a_3 -$
 $(x^{13}/13!)a_7 + (x^{21}/21!)a_{11} - \dots) / ((x^4/4!)a_2 - (x^{12}/12!)a_6 +$
 $(x^{20}/20!)a_{10} - \dots)$, равенство сорок четыре.



$$4\left(\frac{B_2x^2}{2!} + \frac{B_{10}x^{10}}{10!} + \dots\right) = -x \frac{\frac{x^5}{5!}a_3 - \frac{x^{13}}{13!}a_7 + \dots}{\frac{x^4}{4!}a_2 - \frac{x^{12}}{12!}a_6 + \dots} \quad (44)$$

$$4\sqrt{2}\left(\frac{B_4x^4}{4!} + \frac{B_{12}x^{12}}{12!} + \dots\right) = x \frac{\frac{x^7}{7!}b_3 - \frac{x^{15}}{15!}b_7 + \dots}{\frac{x^4}{4!}a_2 - \frac{x^{12}}{12!}a_6 + \dots} \quad (45)$$

$$4\sqrt{2}\left(\frac{B_6x^6}{6!} + \frac{B_{14}x^{14}}{14!} + \dots\right) = x \frac{\frac{x^9}{9!}b_4 - \frac{x^{17}}{17!}b_8 + \dots}{\frac{x^4}{4!}a_2 - \frac{x^{12}}{12!}a_6 + \dots} \quad (46)$$

ЧЕТЫРЕ НИТИ

Четыре нити с шагом восемь

Третье: $4\sqrt{2}(B_4x^4/4! + B_{12}x^{12}/12! + B_{20}x^{20}/20! + \dots) = x$ $((x^7/7!)b_3$
 $-(x^{15}/15!)b_7 + (x^{23}/23!)b_{11} - \dots) / ((x^4/4!)a_2 - (x^{12}/12!)a_6 +$
 $(x^{20}/20!)a_{10} - \dots)$, равенство сорок пять.

Четвёртое: $4\sqrt{2}(B_6x^6/6! + B_{14}x^{14}/14! + B_{22}x^{22}/22! + \dots) = x$
 $((x^9/9!)b_4 - (x^{17}/17!)b_8 + (x^{25}/25!)b_{12} - \dots) / ((x^4/4!)a_2 -$

$(x^{12}/12!)a_6 + (x^{20}/20!)a_{10} - \dots)$, равенство сорок шесть.

Примечание редакторов из приложения I, примечания к статье 1.

ПРИМ. РЕДАКЦИИ

p.1: B_{2n} for the usual B_n

p.1: $c_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

p.4: (12) true for odd $n > 1$

✕ p.8: after (27): series diverges for $x \geq n$

✕ p.9: after (29): the same

p.9: coefficients, if integral, are odd

p.10: $\psi(z+1) - \psi(\frac{1}{2}z+1) = \log 2 - \sum \frac{(-1)^{m-1}}{z+m}$

p.11: $B_{444} = N/D$

Примечания редакторов

Страница 1, равенство один: Рамануджан пишет B_{2n} там, где обычно пишут B_n . Страница 1, равенство два: $c_k = n!/(k!(n-k)!)$, биномиальный коэффициент. Страница 4, равенство двенадцать: равенство двенадцать верно, если n нечётно и больше 1, а последние члены даны в трёх случаях, когда n при делении на 6 даёт остаток 1, минус 1 или 3. Страница 8, вывод после равенства двадцать семь в параграфе 11: доказательство в таком виде неверно, поскольку ряд под интегралом расходится, когда x не меньше n . То же замечание относится к странице 9, к выводу

после равенства двадцать девять. Страница 9, вторая строка снизу, параграф 12: коэффициенты, если они целые, обязательно нечётны. Страница 10, равенство тридцать два: примените равенство тридцать один к известной формуле $\psi(z + 1) - \psi(\frac{1}{2}z + 1) = \log 2 - \sum (-1)^{m-1}/(z + m)$, где $\psi(z)$ — производная $\log \Gamma(z)$. Страница 11, вторая строка снизу, параграф 15: N и D — числитель и знаменатель B_{444} .

Статья интересна как образец самой ранней манеры Рамануджана, но основные результаты хорошо известны, а доказательства неполны. Так, утверждение двадцать из параграфа 8 — это просто теорема фон Штаудта — Клаузена, а утверждение шестнадцать, следствие утверждения двадцать, было известно Эйлеру: см. P. Bachmann, «Niedere Zahlentheorie», т. 2, с. 43–51 и с. 54, или N. Nielsen, «Traité élémentaire des nombres de Bernoulli», с. 244–245 и 258. Рамануджан формулирует восемь теорем, а именно утверждения с четырнадцатого по двадцать первое, выражающих арифметические свойства чисел B . Для трёх из них, а именно шестнадцатого, двадцатого и двадцать первого, указаны доказательства; но теоремы, на которые эти доказательства опирались бы, а именно равенство двадцать восемь и соответствующие утверждения о рядах тридцать и тридцать два, так и не доказаны. Ещё две теоремы, семнадцатая и восемнадцатая, объявлены следствиями шестнадцатой и четырнадцатой, а четырнадцатая, пятнадцатая и девятнадцатая высказаны лишь как гипотезы.

ИТОГИ ИЗВЕСТНЫ, ДОКАЗ. НЕПОЛНЫ

20: ШТАУДТ-КЛАУЗЕН

16: ЭЙЛЕР

НАБРОСОК ДОК. СЛЕДСТВИЕ ГИПОТЕЗА

16, 20, 21 **?**

17, 18

14, 15, 19

rest on (28), (30), (32)

НЕ ДОКАЗАНО

Восемь утверждений по полкам

Вопросы

1. Какие числа Бернулли стоят в левой части равенства сорок три?
 - a. $B_0, B_8, B_{16}, B_{24}, \dots$ — с шагом восемь
 - b. Все числа Бернулли с чётными номерами
 - c. Только B_2 и B_{10}
 - d. Каждое пятое число Бернулли

2. Что говорят редакторы о доказательстве в параграфе 11 после равенства двадцать семь?
 - a. В таком виде оно неверно, поскольку ряд под интегралом расходится, когда x не меньше n
 - b. Оно полное и верное
 - c. Оно списано у Эйлера
 - d. Оно доказывает утверждение четырнадцать
3. Каков общий вердикт редакторов о статье?
 - a. Она интересна как образец самой ранней манеры Рамануджана, но её основные результаты хорошо известны, а доказательства неполны
 - b. Полное и оригинальное решение всех поставленных задач
 - c. Целиком ошибочна
 - d. Представляет чисто исторический интерес, верных результатов в ней нет
4. Какие утверждения, по словам редакторов, высказаны лишь как гипотезы?
 - a. Четырнадцатое, пятнадцатое и девятнадцатое
 - b. Шестнадцатое, двадцатое и двадцать первое
 - c. Семнадцатое и восемнадцатое
 - d. Все восемь

Ответы

1. a) В левой части равенства сорок три стоит $4(B_0 + B_8x^8/8! + B_{16}x^{16}/16! + B_{24}x^{24}/24! + \dots)$.

2. а) Доказательство в таком виде неверно, поскольку ряд под интегралом расходится, когда x не меньше n .

3. а) Статья интересна как образец самой ранней манеры Рамануджана, но основные результаты хорошо известны, а доказательства неполны.

4. а) Четырнадцатое, пятнадцатое и девятнадцатое высказаны лишь как гипотезы; семнадцатое и восемнадцатое — следствия, а для шестнадцатого, двадцатого и двадцать первого указаны доказательства.

Задачи

1. Вычислите $a_2 = (1 + 1/\sqrt{2})^2 + (1 - 1/\sqrt{2})^2$.

Подсказка: Раскройте оба квадрата; средние члены сократятся.

Ответ: $a_2 = 2(1 + 1/2) = 3$, поскольку $(1 \pm 1/\sqrt{2})^2 = 1 \pm \sqrt{2} + 1/2$.

2. Проверьте старший член равенства сорок три: чему при малом x равно $-x ((x^3/3!)a_2)/((x^4/4!)a_2)$ и что это говорит о B_0 ?

Подсказка: Множители a_2 сокращаются.

Ответ: Это $-x (x^3/6)/(x^4/24) = -4$, а левая часть начинается с $4B_0$, так что $B_0 = -1$.

3. На какие недоказанные результаты, по словам редакторов, опираются указанные Рамануджаном доказательства утверждений шестнадцать, двадцать и двадцать один?

Подсказка: Вспомните ряды из параграфа 12.

Ответ: На равенство двадцать восемь и соответствующие утверждения о рядах тридцать и тридцать два, которые так и не доказаны.