

Собрание статей Сринивасы Рамануджана



Srinivasa Ramanujan · 1927

Иллюстрированные аудиолекции

Lecturized

Собрание статей Сринивасы Рамануджана

Иллюстрированные аудиолекции

Srinivasa Ramanujan · 1927

Пересказано в иллюстрированных лекциях Lecturized
lecturized.com

По оригиналу: Collected Papers of Srinivasa Ramanujan, ed. G. H. Hardy, P. V. Seshu
Aiyar and B. M. Wilson (Cambridge, 1927)

Содержание

Числа, спрятанные в котангенсе

Как заставить исчезнуть половину членов

Формула для проверки — и таблица

Закономерности, прочитанные по таблице

Дробная часть и число, найденное по его величине

Доказательство, которое держится на одном утверждении

Сколько цифр — и следующее значение по предыдущему

Описание великана и пятикратные сита

Четырёхкратные сита и вердикт редакторов

Числа, спрятанные в котангенсе

Возьмите калькулятор, переключите его на радианы и посчитайте $0,1 \times \operatorname{ctg} 0,1$: получится 0,9966644. Теперь вручную посчитайте $1 - 0,01/3 - 0,0001/45$ — и появятся те же цифры. Эти маленькие дроби, одна третья и одна сорок пятая, сложены из знаменитого семейства чисел, и в 1911 году молодой конторский служащий из Мадраса, Рамануджан, опубликовал о них свою первую статью.

$$\begin{array}{ccc} 0.1 \cot 0.1 & & 1 - \frac{0.01}{3} - \frac{0.0001}{45} \\ \boxed{0.9966644} & = & \mathbf{0.9966644} \end{array}$$

$$x \cot x = 1 - \frac{B_2}{2!} (2x)^2 - \frac{B_4}{4!} (2x)^4 - \dots$$

$$B_2 = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{x^2}{3}$$

$$B_4 = \frac{1}{30} \Rightarrow \frac{x^4}{45}$$

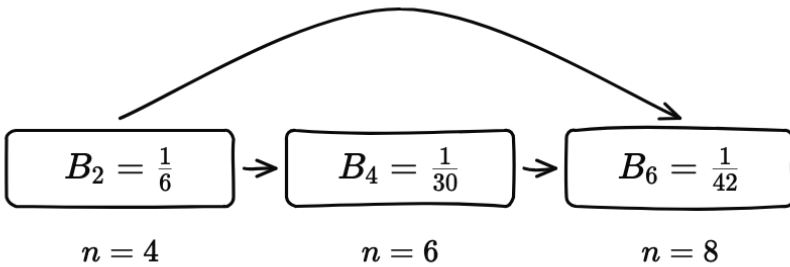
$$B_0 = -1$$

Две дороги к 0,9966644

Он начинает с разложения $\operatorname{ctg} x = 1 - (B_2/2!)(2x)^2 - (B_4/4!)(2x)^4 - (B_6/6!)(2x)^6 - \dots$ — это его равенство один. Словами: функция x , умноженное на котангенс x , — это сумма чётных степеней x , и в каждом коэффициенте сидит число B_n , число Бернулли в обозначениях Рамануджана, здесь всегда положительное. Откуда это берётся: котангенс — это косинус, делённый на синус, оба — известные степенные ряды, и деление одного ряда на другой даёт этот ряд. При $B_2 = 1/6$ второй член равен $(1/6)/2 \times 4x^2 = x^2/3$, а при $B_4 = 1/30$ третий равен $x^4/45$: ровно те дроби, что на вашем калькуляторе. Читая так же свободный член, он полагает $B_0 = -1$, чтобы и первый член вписался в закономерность.

Затем он записывает котангенс тремя способами: как $\cos x / \sin x$, как $\sin 2x / (1 - \cos 2x)$ и как $(1 + \cos 2x) / \sin 2x$, раскладывая числитель и знаменатель каждого в степенные ряды. Умножьте каждое равенство на его знаменатель, и обе части станут обычными рядами; два ряда равны, только если при каждой степени x стоит одинаковый коэффициент, поэтому одно такое сравнение даёт одно уравнение для чисел B . Чётный случай:
$$c_2 B_{n-2} - c_4 B_{n-4} + c_6 B_{n-6} - \dots + (-1)^{((n-2)/2)} B_0 + (n/2) (-1)^{((n-2)/2)} = 0,$$
 равенство три, где c_k означает число способов выбрать k предметов из n . Попробуйте $n = 4$: $6 \times B_2 + 1 - 2 = 0$, значит, $B_2 = 1/6$. Попробуйте $n = 6$: $15B_4 - 15 \times 1/6 - 1 + 3 = 0$, значит, $B_4 = 1/30$. Равенства два и четыре делают то же для нечётных n , причём в первом участвуют степени двойки.

ВСЕ ПРЕЖНИЕ



$$(x \cot x)^2 = -x^2 \left(1 + \frac{d \cot x}{dx} \right)$$

$$\frac{1}{2}(n+1)B_n = c_2 B_2 B_{n-2} + \dots$$

Решаем равенство три шаг за шагом

Опыт

Карандашом на бумаге подставьте n , равное 8, в равенство три и найдите B шесть. У вас должно получиться $28B_6 - 70/30 + 28/6 + 1 - 4 = 0$, а значит, $B_6 = 1/42$.

Беда, говорит Рамануджан, в том, что каждому новому B нужны все предыдущие, каждый раз примерно половина от n членов, и работа становится утомительной. Его первый короткий путь возводит ряд в квадрат: $(x \cot x)^2 = -x^2(1 + d \cot x / dx)$ — тождество, которое любой может проверить по производной котангенса. Сравнение коэффициентов даёт $\frac{1}{2}(n+1)B_n =$

$c_2B_2B_{n-2} + c_4B_4B_{n-4} + \dots$, результат пять, который обрывается посередине квадратным членом, когда половина n чётна. При $n = 4$ он читается так: $(5/2)B_4 = 1/2 \times 6 \times (1/6)^2 = 1/12$, и снова $B_4 = 1/30$. Тот же приём работает с $d \operatorname{tg} x / dx = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

Запомним

Рамануджан определяет свои числа Бернулли как коэффициенты ряда для $x \operatorname{ctg} x$ — все положительные, а B ноль принимается равным минус единице. Если записать котангенс как отношение рядов и сравнить каждую степень x , это определение превращается в уравнения, которые выдают числа B одно за другим: одна шестая, одна тридцатая, одна сорок вторая. Каждое такое уравнение использует все предыдущие B , поэтому работа быстро растёт. Возведение $x \operatorname{ctg} x$ в квадрат даёт второе соотношение — оно использует произведения чисел B и приводит к тем же значениям; это первый намёк на то, что более хитрые тождества могут сократить работу.

Вопросы

1. Почему дроби одна третья и одна сорок пятая в проверке на калькуляторе не случайны?
 - а. Это ошибки округления калькулятора
 - б. Это коэффициенты $x \operatorname{ctg} x$, построенные из $B_2 = 1/6$ и $B_4 = 1/30$ по равенству (1)

- с. Это первые два простых знаменателя
 - d. Они берутся из одного ряда синуса
2. Почему Рамануджан полагает $B_0 = -1$?
- a. Чтобы свободный член $x \operatorname{ctg} x$ вписался в ту же закономерность, что и остальные члены
 - b. Потому что все числа Бернулли отрицательны
 - с. Чтобы у равенства три не было решения при нечётных n
 - d. Потому что $\operatorname{ctg} 0$ равен -1
3. Почему сравнение коэффициентов — законный способ получать уравнения?
- a. Два ряда могут быть равны, только если при каждой степени x в обеих частях стоит один и тот же коэффициент
 - b. У всех степенных рядов одинаковые коэффициенты
 - с. Коэффициенты всегда целые
 - d. Коэффициенты можно выбирать произвольно
4. Какое тождество даёт результат пять — соотношение с произведениями чисел B ?
- a. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
 - b. $(x \operatorname{ctg} x)^2 = -x^2(1 + d \operatorname{ctg} x / dx)$
 - с. $\operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x$
 - d. $d \sin x / dx = \cos x$

Ответы

1. b) При $B_2 = 1/6$ второй член равенства (1) равен $x^2/3$, а при $B_4 = 1/30$ третий равен $x^4/45$: это и есть дроби на калькуляторе.

2. а) Читая свободный член так же, как остальные, он полагает B_0 равным -1 , чтобы первый член вписался в закономерность.

3. а) После умножения на знаменатель обе части — обычные ряды, а два ряда равны, только если при каждой степени x стоит один и тот же коэффициент.

4. б) Его первый короткий путь возводит ряд в квадрат с помощью $(x \operatorname{ctg} x)^2 = -x^2(1 + d \operatorname{ctg} x / dx)$ и сравнивает коэффициенты.

Разобранные примеры

B_2 и B_4 из равенства три При $B_0 = -1$ воспользуйтесь равенством три при $n = 4$ и $n = 6$, чтобы найти B_2 и B_4 ; s_k — число способов выбрать k предметов из n .

При $n = 4$ имеем $s_2 = 6$, а знак $(-1)^{((4-2)/2)}$ равен -1 , так что уравнение имеет вид $6B_2 - B_0 - 2 = 0$.

Подставляя $B_0 = -1$, получаем $6B_2 + 1 - 2 = 0$, значит, $B_2 = 1/6$.

При $n = 6$ имеем $s_2 = s_4 = 15$, а знак равен $+1$, так что $15B_4 - 15B_2 + B_0 + 3 = 0$.

То есть $15B_4 - 15/6 - 1 + 3 = 0$, значит, $15B_4 = 1/2$.

Ответ: $B_2 = 1/6$, $B_4 = 1/30$

Задачи

1. Подставьте $n = 8$ в равенство три и найдите B_6 .

Подсказка: $s_2 = 28$, $s_4 = 70$, $s_6 = 28$, а знак $(-1)^{((8-2)/2)}$ равен -1 , так что член с B_0 становится равным $+1$.

Ответ: $B_6 = 1/42$: из $28B_6 - 70/30 + 28/6 + 1 - 4 = 0$ получаем $28B_6 = 2/3$.

2. С помощью результата пять при $n = 4$ получите B_4 из $B_2 = 1/6$.

Подсказка: Половина от 4 чётна, так что единственный член — $\frac{1}{2} c_2 (B_2)^2$, где $c_2 = 6$.

Ответ: $B_4 = 1/30$: $(5/2)B_4 = \frac{1}{2} \times 6 \times 1/36 = 1/12$.

3. Взяв $B_6 = 1/42$ в равенстве (1), найдите коэффициент при x^6 в $x \operatorname{ctg} x$.

Подсказка: Член равен $(B_6/6!)(2x)^6$, а $6! = 720$, $2^6 = 64$.

Ответ: $-2/945$: $(1/42)/720 \times 64 = 64/30240 = 2/945$, со знаком минус из равенства (1).

Как заставить исчезнуть половину членов

Посадите на качели-доску двух человек одного веса, по одному на каждый конец: доска остаётся ровной, потому что насколько один давит вниз, настолько другой поднимает вверх. Следующий ход Рамануджана устроен как эти качели, только вместо людей — функции. Он складывает два ряда, члены которых в одних местах равны, а в других противоположны, и каждая противоположная пара сокращается.



СТГ	B_0	$+B_2$	$+B_4$	$+B_6$	$+B_8$	$+B_{10}$
------------	-------	--------	--------	--------	--------	-----------

СТН	B_0	$-B_2$	$+B_4$	$-B_6$	$+B_8$	$-B_{10}$
------------	-------	--------	--------	--------	--------	-----------

СУММА	$2B_0$	0	$2B_4$	0	$2B_8$	0
--------------	--------	-----	--------	-----	--------	-----

Двойники, которые сокращаются

Партнёр котангенса — гиперболический котангенс, cth , то есть котангенс от мнимого аргумента: $\text{cth } \frac{1}{2}x = i \text{ctg } \frac{1}{2}ix$, где i — квадратный корень из минус единицы. Его ряд имеет те же коэффициенты, что и ряд котангенса, только знак у каждого второго перевернут. Поэтому он пишет $-\frac{1}{2}x(\text{ctg } \frac{1}{2}x + \text{cth } \frac{1}{2}x) = 2(B_0 + B_4x^4/4! + B_8x^8/8! + \dots)$. Словами: сумма двух рядов сохраняет только члены, номер которых кратен четырём, — B ноль, B четыре, B восемь — и удваивает их; члены с B два, B шесть, B десять сокращаются, как на качелях.

Чтобы превратить левую часть во что-то пригодное для счёта, он переписывает её одной дробью и применяет теорему Муавра — правило возведения комплексных чисел в степень. Получается равенство шесть: $2(B_0 + B_4x^4/4! + \dots) = -x(x/1! - x^5/(2^2 \cdot 5!) + x^9/(2^4 \cdot 9!) - \dots) / (x^2/2! - x^6/(2^2 \cdot 6!) + x^{10}/(2^4 \cdot 10!) - \dots)$. Проверьте первый член: при очень малом x правая часть равна $-x \cdot x / (x^2/2) = -2$, а левая начинается с $2B_0 = -2$, так что всё сходится.

Если вычитать, а не складывать, остаётся другая половина: $-\frac{1}{2}x(\text{ctg } \frac{1}{2}x - \text{cth } \frac{1}{2}x) = 2(B_2x^2/2! + B_6x^6/6! + B_{10}x^{10}/10! + \dots)$, и равенство семь даёт её как $x(x^3/(2 \cdot 3!) - x^7/(2^3 \cdot 7!) + \dots) / (x^2/2! - x^6/(2^2 \cdot 6!) + \dots)$. При очень малом x правая часть равна $x \cdot (x^3/12) / (x^2/2) = x^2/6$, а левая начинается с B_2x^2 , так что $B_2 = 1/6$ получается сразу.

Сравнение коэффициентов, как и прежде, даёт равенство восемь для чётных n больше 2: $c_2B_{n-2}/2 - c_6B_{n-6}/2^3 + c_{10}B_{n-10}/2^5 - \dots + (n/2^{((n+2)/2)})(-1)^{(n/4)} = 0$, где знак равен $(-1)^{(n/4)}$, когда n кратно 4, и $(-1)^{((n-2)/4)}$, когда кратно n минус 2. Попробуйте $n = 6$: $15 \times (1/30)/2 - (-1)/8 - 6/16 = 0,25 + 0,125 - 0,375 = 0$. Всё дело в количестве: в равенствах два–четыре было $1/2n$ членов, все

прежние В; в равенстве восемь их примерно $\frac{1}{4}n$, только каждый второй. То же работает с $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x \pm \operatorname{th} \frac{1}{2}x$.

$$c_2 \frac{B_{n-2}}{2} - c_6 \frac{B_{n-6}}{2^3} + c_{10} \frac{B_{n-10}}{2^5} - \dots = 0$$

$$n = 6 : \quad 0.25 + 0.125 - 0.375 = 0$$

TG ± TH: ТАК ЖЕ

Р. 2-4 $\frac{n}{2}$

Р. 8 $\frac{n}{4}$

$$n = 4 : \quad 0.5 - 0.5 = 0$$

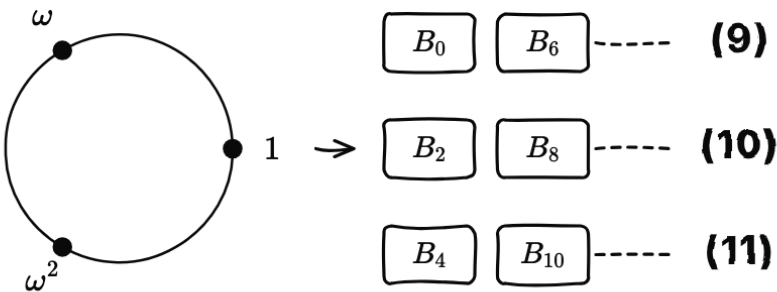
Половина прежних членов

Опыт

Проверьте на бумаге равенство восемь при $n = 4$: в нём только члены $c_2 B_{2/2}$ и последний. При $c_2 = 6$ и $B_2 = 1/6$ получается $6 \times (1/6)/2 - 4/2^3 = 0,5 - 0,5 = 0$.

В параграфе четвёртом Рамануджан продвигает ту же мысль от двух к трём, используя кубические корни из единицы 1, ω , ω^2 — три числа, куб которых равен 1, причём $1 + \omega + \omega^2 = 0$. Из

тождества $4 \sin x \sin x\omega \sin x\omega^2 = -(\sin 2x + \sin 2x\omega + \sin 2x\omega^2)$ и логарифмического дифференцирования он получает тройные смеси котангенсов, и теперь сокращаются два члена из каждых трёх. Выжившие члены дают равенства девять, десять и одиннадцать, например $3(B_0 + B_6x^6/6! + B_{12}x^{12}/12! + \dots) = -x(x^2/2! - x^8/8! + \dots) / (x^3/3! - x^9/9! + \dots)$, где остаётся лишь каждое шестое B . При очень малом x его правая часть равна $-x(x^2/2)/(x^3/6) = -3$, что совпадает с $3B_0 = -3$. Равенство десять сохраняет B два, B восемь, B четырнадцать, и его старший член $x(x^4/24)/(x^3/6) = x^2/4$ совпадает с $3B_2x^2/2 = x^2/4$; равенство одиннадцать сохраняет B четыре, B десять, B шестнадцать.



P. 4

P. 12

Сравнение коэффициентов в них даёт равенство двенадцать: $c_3B_{n-3} - c_9B_{n-9} + c_{15}B_{n-15} - \dots = 0$ для нечётных n , замыкаемое последним членом $\frac{1}{6}n$ или $\frac{1}{3}n$ со знаком, зависящим от остатка от деления n на 6. При $n = 5$ это просто $c_3B_2 = 5/3$, то есть $10 \times 1/6 = 5/3$: шаги по шесть, треть членов равенства четыре. Наконец, он делит равенство десять на x и дифференцирует, готовя формулу с произведениями для проверки, — о ней дальше.

Запомним

Сложение котангенса с его гиперболическим двойником сокращает каждый второй член с числами Бернулли, оставляя B ноль, B четыре, B восемь; вычитание оставляет B два, B шесть, B десять. Теорема Муавра превращает каждую половину в отношение простых рядов — равенства шесть и семь, — а сравнение коэффициентов даёт равенство восемь, где лишь около четверти n членов. Кубические корни из единицы делают то же с шагом три, так что каждое из равенств девять—одиннадцать сохраняет каждое шестое B , а равенству двенадцать нужна лишь треть членов простого способа. Старшие члены этих отношений сразу проверяют первые значения: B ноль равно минус единице, а B два — одной шестой.

Вопросы

1. Почему сумма котангенса и гиперболического котангенса сохраняет только $B_0, B_4, B_8, \dots$?

- a. Потому что у гиперболического ряда те же коэффициенты, но знак каждого второго перевёрнут, так что члены с B_2, B_6, B_{10} сокращаются
 - b. Потому что гиперболический котангенс равен нулю
 - c. Потому что сами B_2, B_6, B_{10} равны нулю
 - d. Потому что теорема Муавра убирает нечётные члены
2. Что сообщает старший член равенства семь?
- a. Что $B_0 = -1$
 - b. Что $B_2 = 1/6$, так как $x \cdot (x^3/12)/(x^2/2) = x^2/6$ совпадает с $B_2 x^2$
 - c. Что $B_4 = 1/30$
 - d. Что ряд расходится
3. Сколько членов нужно равенству восемь по сравнению с равенствами два—четыре?
- a. Примерно столько же
 - b. Около четверти n вместо половины n — только каждое второе прежнее B
 - c. Только один член
 - d. Вдвое больше
4. Почему кубические корни из единицы гасят два члена из каждых трёх?
- a. Потому что $1 + \omega + \omega^2 = 0$, так что тройная смесь гасит всё, кроме каждого третьего члена
 - b. Потому что ω — действительное число
 - c. Потому что $\operatorname{ctg} \omega = 0$
 - d. Потому что все они равны единице

Ответы

1. **a)** У ряда $\cosh$ те же коэффициенты, но знак каждого второго перевёрнут, так что при сложении сокращаются члены, номер которых не кратен четырём.
2. **b)** При очень малом x правая часть равна $x^2/6$, а левая начинается с B_2x^2 , так что $B_2 = 1/6$.
3. **b)** В равенствах два–четыре было $1/2n$ членов, все прежние B ; в равенстве восемь их около $1/4n$, только каждое второе.
4. **a)** Три кубических корня в сумме дают ноль, так что тройная смесь котангенсов сохраняет лишь одну нить чисел B из трёх.

Разобранные примеры

Равенство восемь при $n = 6$ Проверьте равенство восемь при $n = 6$, $B_0 = -1$ и $B_4 = 1/30$. Здесь $n - 2 = 4$ кратно 4, так что последний член равен $(6/2^4)(-1)^{((6-2)/4)}$.

Члены такие: $c_2B_4/2$ и $-c_6B_0/2^3$, где $c_2 = 15$ и $c_6 = 1$.

$$c_2B_4/2 = 15 \times (1/30)/2 = 0,25.$$

$$-c_6B_0/2^3 = -(-1)/8 = 0,125.$$

$$\text{Последний член равен } (6/16) \times (-1)^1 = -0,375.$$

Сумма равна $0,25 + 0,125 - 0,375 = 0$, как и требует равенство восемь.

Ответ: 0, так что равенство восемь выполняется

Задачи

1. По старшему члену равенства шесть найдите B_0 .

Подсказка: При очень малом x правая часть равна $-x \cdot x / (x^2/2)$.

Ответ: $B_0 = -1$: правая часть стремится к -2 , а левая — к $2B_0$.

2. С помощью равенства двенадцать при $n = 5$ найдите B_2 .

Подсказка: При $n = 5$ равенство сводится к $с_3 B_2 = 5/3$, где $с_3 = 10$.

Ответ: $B_2 = 1/6$; $10B_2 = 5/3$.

3. По старшему члену равенства десять снова найдите B_2 .

Подсказка: Правая часть начинается с $x(x^4/24)/(x^3/6)$, левая — с $3B_2 x^2/2$.

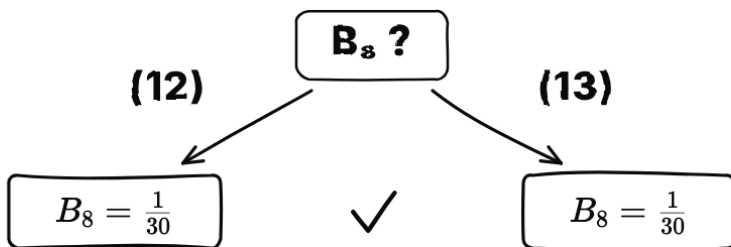
Ответ: $B_2 = 1/6$: правая часть равна $x^2/4$, так что $3B_2/2 = 1/4$.

Формула для проверки — и таблица

Бухгалтер, который складывает длинный столбец дважды, сверху вниз и снизу вверх, не теряет время зря: два разных пути, которые сходятся, делают ошибку очень маловероятной. Рамануджан встраивает в свой метод такую же страховку.

$$\frac{1}{3}(n+2)B_n = c_6 B_{n-6} B_6 + c_{12} B_{n-12} B_{12} + \dots$$

(13)



$$\frac{10}{3} B_8 = 28 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{42} = \frac{1}{9}$$

Две дороги к B8

После дифференцирования равенства десять производная отношения оказывается равной $1 - (x^2/2! - x^8/8! + \dots)(x^4/4! - x^{10}/10! + \dots) / (x^3/3! - x^9/9! + \dots)^2$. Каждая из этих двух дробей уже известна из равенств девять и десять, так что правая часть

превращается в $x^2 + 9(V_0 + V_6x^6/6! + \dots)(V_2x^2/2! + V_8x^8/8! + \dots)$. Сравнение коэффициентов при x^n даёт результат тринадцать, верный, когда n минус 2 кратно 6: $\frac{1}{3}(n + 2)V_n = c_6V_{n-6}V_6 + c_{12}V_{n-12}V_{12} + c_{18}V_{n-18}V_{18} + \dots$. Словами: число V из нити два, восемь, четырнадцать равно сумме произведений прежних пар. Откуда это берётся: производную отношения рядов можно записать через сами эти отношения — так производная тангенса равна единице плюс тангенс в квадрате. При $n = 8$ произведение одно: $(10/3)V_8 = 28 \times (1/6) \times (1/42) = 1/9$, так что $V_8 = 1/30$. Рамануджан прямо называет разделение труда: равенство двенадцать вычисляет числа V очень быстро, а равенство тринадцать может оказаться полезным для проверки. В обоих треть членов равенства четыре, так что V_{24} нужны лишь V_{18} , V_{12} и V_6 .

Параграф пятый пускает метод в дело. Рамануджан хочет изучать числа V по их свойствам, а для этого ему сначала нужен запас значений, поэтому он полагает n равным 3, 5, 7, 9 и так далее в равенстве двенадцать. Каждый выбор даёт короткое уравнение, например $V_8 - \frac{1}{3}V_2 = -1/45$. При $V_2 = 1/6$ это $V_8 = 1/18 - 1/45 = 3/90 = 1/30$ — то же значение, что дал результат тринадцать. Следующее — $V_{10} - (5/2)V_4 = -1/132$, так что $V_{10} = 1/12 - 1/132 = 5/66$. А $V_{12} - 11V_6 = -4/455$ даёт $V_{12} = 11/42 - 4/455 = 691/2730$.

$$B_8 - \frac{1}{3}B_2 = -\frac{1}{45}$$

$$B_8 = \frac{1}{18} - \frac{1}{45} = \frac{1}{30}$$

$$B_{10} = \frac{1}{12} - \frac{1}{132} = \frac{5}{66}$$

$$B_{12} = \frac{11}{42} - \frac{4}{455} = \frac{691}{2730}$$

$$\frac{11}{42} - \frac{4}{455}$$



0.2531136

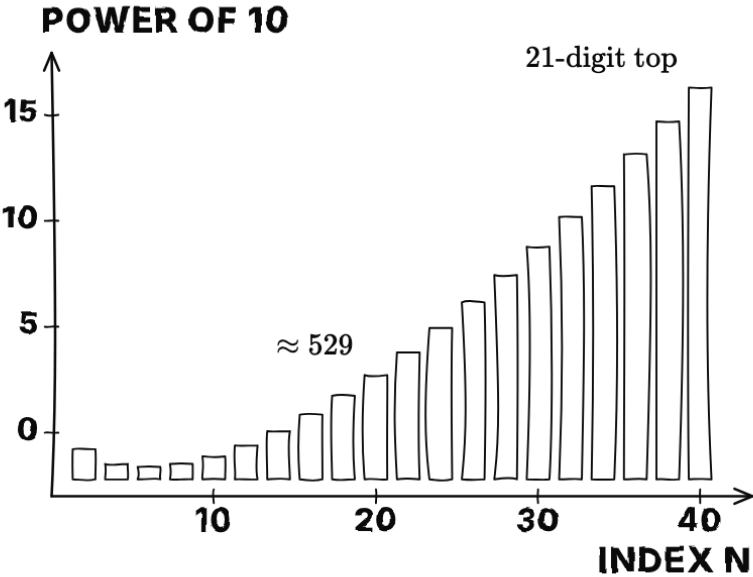
Три значения вручную

Опыт

Возьмите калькулятор и проверьте последнее: одиннадцать, делённое на сорок два, минус четыре, делённое на четыреста пятьдесят пять. Вы должны увидеть $0,2619048 - 0,0087912 = 0,2531136$, и $691/2730$ даёт те же цифры.

Продолжая так, он выписывает двадцать значений, от $B_2 = 1/6$ до B_{40} . Сначала они остаются маленькими, $B_{14} = 7/6$, потом быстро растут: $B_{20} = 174611/330$, около 529, а у B_{40} числитель из 21 цифры при знаменателе всего 13530. Знаменатели остаются скромными, а числители взрываются, и таблица кончается

замечанием, что числа В растут сверх всякого предела. Эти двадцать дробей — свидетельство, из которого следующие параграфы выводят свои закономерности.



Двадцать значений: малые, потом огромные

Запомним

Дифференцирование равенства десять вместе с равенствами девять и десять даёт результат тринадцать, который записывает число B как сумму произведений прежних пар. Равенство двенадцать — для быстрого вычисления, равенство тринадцать — для проверки; обоим нужна лишь треть членов простого способа, и для B восемь оба дают одну тридцатую. Подставляя n , равное 3, 5, 7 и так далее, в равенство двенадцать, Рамануджан получает таблицу из двадцати чисел B — сначала маленькие дроби, потом числа с числителями в двадцать и больше цифр.

Вопросы

1. Для чего, по словам Рамануджана, служит результат тринадцать?
 - a. Для самого быстрого вычисления чисел B
 - b. Для проверки вычислений, сделанных по равенству двенадцать
 - c. Для нахождения знаменателей
 - d. Для доказательства того, что числа B положительны
2. Зачем Рамануджан вычисляет таблицу чисел B в параграфе пятом?
 - a. Чтобы изучать числа B по их свойствам, ему сначала нужен запас значений

- b. Потому что иначе равенством двенадцать воспользоваться нельзя
 - c. Чтобы проверить значение π
 - d. Потому что таблица доказывает его последующие утверждения
3. Что показывает таблица о величине чисел B ?
- a. Они убывают к нулю
 - b. Они остаются меньше единицы
 - c. Сначала они малы, потом очень быстро растут, а знаменатели остаются скромными
 - d. Все они целые

Ответы

1. **b)** Равенство двенадцать вычисляет числа B очень быстро, а равенство тринадцать может оказаться полезным для проверки.
2. **a)** Он хочет изучать числа B по их свойствам, а для этого ему сначала нужен запас значений.
3. **c)** Сначала значения остаются малыми, потом быстро растут; знаменатели остаются скромными, а числители взрываются.

Разобранные примеры

B_8 двумя способами Найдите B_8 по результату тринадцать при $n = 8$, а затем по уравнению из параграфа пятого $B_8 - \frac{1}{3}B_2 = -\frac{1}{45}$, взяв $B_2 = \frac{1}{6}$ и $B_6 = \frac{1}{42}$.

В результате тринадцать при $n = 8$ одно произведение: $(\frac{10}{3})B_8 = c_6B_2B_6$, где $c_6 = 28$.

$28 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{42} = \frac{1}{9}$, так что $B_8 = (\frac{1}{9}) \times (\frac{3}{10}) = \frac{1}{30}$.

Уравнение из параграфа пятого даёт $V_8 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} - \frac{1}{45} = \frac{1}{18} - \frac{1}{45}$.

$$\frac{1}{18} - \frac{1}{45} = \frac{5}{90} - \frac{2}{90} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}.$$

Ответ: $V_8 = \frac{1}{30}$ обоими способами

Задачи

1. Из $V_{10} - (5/2)V_4 = -1/132$ и $V_4 = 1/30$ найдите V_{10} .

Подсказка: Пять вторых от одной тридцатой — это одна двенадцатая.

Ответ: $V_{10} = \frac{1}{12} - \frac{1}{132} = \frac{11}{132} - \frac{1}{132} = \frac{10}{132} = \frac{5}{66}.$

2. Из $V_{12} - 11V_6 = -4/455$ и $V_6 = 1/42$ найдите V_{12} в виде дроби.

Подсказка: Возьмите общий знаменатель $2730 = 42 \times 65 = 455 \times 6$.

Ответ: $V_{12} = \frac{11}{42} - \frac{4}{455} = \frac{715}{2730} - \frac{24}{2730} = \frac{691}{2730}.$

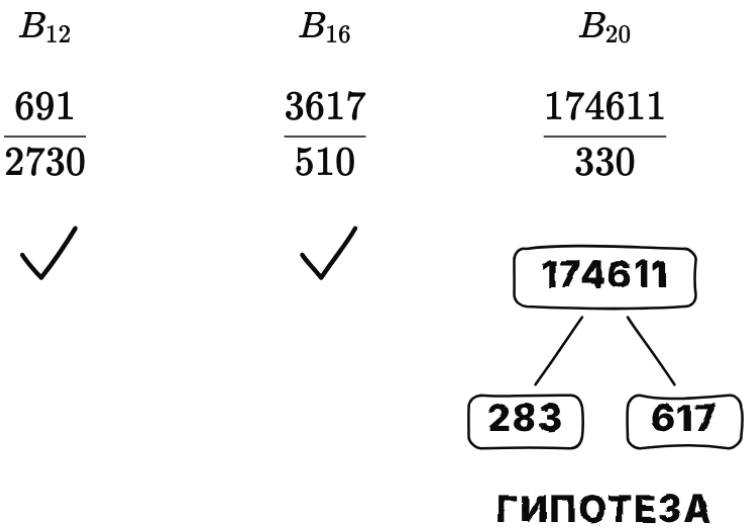
3. Примерно какова величина $V_{20} = 174611/330$?

Подсказка: Разделите 174611 на 330.

Ответ: Около 529,1, так как $330 \times 529 = 174570$, а остаток равен 41.

Закономерности, прочитанные по таблице

Взгляните на таблицу ещё раз: $B_{12} = 691/2730$, $B_{16} = 3617/510$, $B_{20} = 174611/330$. Каждый знаменатель чётен и делится на три, причём знаменатели маленькие и аккуратные, а числители выглядят случайными. Теперь Рамануджан формулирует, что он наблюдает, для каждого чётного n , отличного от нуля, и осторожно называет это наблюдениями: объяснения он обещает позже, в параграфе двенадцатом.



Три образца, одно сломанное правило

Утверждение четырнадцать: B_n — дробь, и числитель B_n/n в несократимом виде — простое число. Для B_{12} этот числитель равен 691 — простое число, а для B_{16} он равен 3617 — тоже простое. Но дальнейшая проверка его ломает: для B_{20} числитель $174611 = 283 \times 617$, так что он не простой, и редакторы собрания статей числят это утверждение гипотезой.

Утверждение пятнадцать: знаменатель B_n содержит 2 и 3 ровно по одному разу, как у 6, 30, 42 и 2730. Утверждение шестнадцать: $2^n(2^n - 1)B_n/n$ — целое число, а потому $2(2^n - 1)B_n$ — нечётное целое число. При $n = 6$: $2 \times 63 \times 1/42 = 3$ — нечётное, как и обещано; при $n = 12$: $2 \times 4095 \times 691/2730 = 2073$ — снова нечётное. Отсюда он выводит утверждение семнадцать: если n не кратно 4, то $4(2^n - 1)B_n/n$ нечётно; при $n = 6$ это $4 \times 63/(42 \times 6) = 1$. Утверждение восемнадцать следует из четырнадцатого: простое число, делящее n , но отсутствующее в знаменателе, делит числитель, и частное простое.

$$B_{22} = \frac{854513}{138}$$

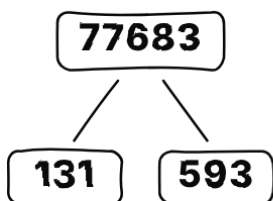
11

6 : all

5 : B_4, B_8, B_{12}

7 : B_6, B_{12}, B_{18}

11 : B_{10}, B_{20}, B_{30}



Одиннадцать уходит вверх

Его примеры: 11 делит 22, но не знаменатель 138 числа B_{22} , так что 11 делит его числитель; 13, 17, 19 ведут себя так же для B_{26} , B_{34} , B_{38} . Части про делимость верны, но обещанные простые частные выдерживают не все: для B_{22} частное $77683 = 131 \times 593$.

Параграф седьмой обращается к знаменателям. Все делятся на 6; знаменатели B_4, B_8, B_{12} — на 5; B_6, B_{12}, B_{18} — на 7; B_{10}, B_{20}, B_{30} — на 11. Отсюда он выводит утверждение девятнадцать:

знаменатель B_n есть произведение простых чисел, которые на единицу больше какого-либо делителя n , включая единицу и само n . Для B_{24} : делители 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 плюс один дают 2, 3, 4, 5, 7, 9, 13, 25; оставляем простые 2, 3, 5, 7, 13, и произведение равно 2730. Нечётные делители, кроме единицы, можно

пропускать: число на единицу больше нечётного чётно, а значит, не простое. Среди его дальнейших примеров — B_{20} , чьи простые 2, 3, 5, 11 дают 330, и B_{72} , чей знаменатель равен 140100870.

ТЕОРЕМА

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 8 & 12 & 24 \\
 +1 \downarrow & & & & & & & & \\
 2 & 3 & \cancel{4} & 5 & 7 & \cancel{9} & 13 & \cancel{25}
 \end{array}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 2730$$

$$B_{20} : 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 330$$

$$B_{30} : 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31 = 14322$$

Утверждение девятнадцать в деле

Опыт

Карандашом на бумаге найдите по этому правилу знаменатель B_{30} . Единица и чётные делители — 1, 2, 6, 10, 30; на единицу больше — 2, 3, 7, 11, 31, все простые, и их произведение равно 14322 — ровно знаменателю из его таблицы.

Правило для знаменателей и утверждения пятнадцать и шестнадцать на самом деле верны; редакторы указывают, что правило, стоящее за ними, было известно Клаузену и фон Штаудту, а утверждение о нечётности — Эйлеру.

Запомним

По своей таблице Рамануджан формулирует закономерности для чисел B с чётным номером: простые числители после деления на n , множители 2 и 3 ровно по разу в каждом знаменателе и целые и нечётные числа, построенные из $2^n - 1$. Знаменатель B_n — произведение простых чисел, на единицу больших делителей n ; для B двадцать четыре это даёт 2730. Это сформулировано как наблюдения: закономерности для знаменателя и нечётности верны и были известны раньше, а утверждение о простом числителе ложно, например $174611 = 283 \times 617$.

Вопросы

1. Как следует понимать утверждения параграфа шестого?
 - a. Как доказанные теоремы
 - b. Как наблюдения, прочитанные по таблице, с объяснениями, обещанными позже
 - c. Как определения
 - d. Как результаты, процитированные у Эдвардса

2. Почему утверждение четырнадцать не выполняется при $n = 20$?
- a. Потому что B_{20} — целое число
 - b. Потому что числитель 174611 равен 283×617 , так что он не простой
 - c. Потому что 20 кратно 4
 - d. Потому что знаменатель B_{20} не делится на 3
3. Что говорит утверждение девятнадцать о знаменателе B_n ?
- a. Он равен $n + 1$
 - b. Это произведение простых чисел, на единицу больших какого-либо делителя n , включая единицу и само n
 - c. Он всегда равен 6
 - d. Это наибольшее простое число меньше n
4. Почему в правиле для знаменателей можно пропускать нечётные делители, кроме единицы?
- a. Потому что число на единицу больше нечётного чётно, а значит, не простое
 - b. Потому что нечётные делители никогда не делят n
 - c. Потому что они дают числитель
 - d. Потому что они всегда равны 1

Ответы

1. **b)** Рамануджан формулирует, что наблюдает, и осторожно называет это наблюдениями, обещая объяснения позже, в параграфе двенадцатом.

2. б) У B_{20} числитель $174611 = 283 \times 617$, так что он не простой, и редакторы числят это утверждение гипотезой.

3. б) Утверждение девятнадцать: знаменатель B_n есть произведение простых чисел, на единицу больших какого-либо делителя n , включая единицу и само n .

4. а) Число на единицу больше нечётного чётно, а значит, не простое, так что в произведение оно не входит.

Разобранные примеры

Утверждение шестнадцать при $n = 12$ Проверьте, что $2(2^{12} - 1)B_{12}$ — нечётное целое число, при $B_{12} = 691/2730$.

$$2^{12} - 1 = 4095.$$

$$2 \times 4095 = 8190, \text{ и } 8190/2730 = 3.$$

$$\text{Значит, } 2(2^{12} - 1)B_{12} = 3 \times 691 = 2073.$$

2073 нечётно, как и говорит утверждение шестнадцать.

Ответ: 2073 — нечётное целое число

Задачи

1. С помощью утверждения девятнадцать найдите знаменатель B_{12} .

Подсказка: Единица и чётные делители 12 — это 1, 2, 4, 6, 12; прибавьте к каждому единицу.

Ответ: 2730: на единицу больше — 2, 3, 5, 7, 13, все простые, и их произведение равно 2730.

2. Проверьте утверждение семнадцать при $n = 10$: нечётное ли целое $4(2^{10} - 1)B_{10}/10$? Возьмите $B_{10} = 5/66$.

Подсказка: $2^{10} - 1 = 1023 = 3 \times 11 \times 31$.

Ответ: Да: $4 \times 1023 \times 5 / (66 \times 10) = 20460 / 660 = 31$ — нечётное.

3. Для $B_{22} = 854513/138$ проверьте, что 11 делит числитель, и найдите частное.

Подсказка: Разделите 854513 на 11.

Ответ: $854513 = 11 \times 77683$, так что 11 его делит; частное 77683 равно 131×593 и не является простым, вопреки утверждению.

Дробная часть и число, найденное по его величине

Допустим, приятель говорит вам, что загадочная дробь чуть больше шести тысяч, что её низ равен 138, а верх делится на одиннадцать. Этого почти хватает, чтобы назвать её точно. Эта часть показывает, как Рамануджан делает именно это с числом Бернулли, а затем привлекает инструменты, которые оценивают его величину.

$$(-1)^{n/2} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots \right) - (-1)^{n/2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17} - 1 = \frac{47}{510}$$

$$3617 = 7 \cdot 510 + 47$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{23} = \frac{17}{138}$$

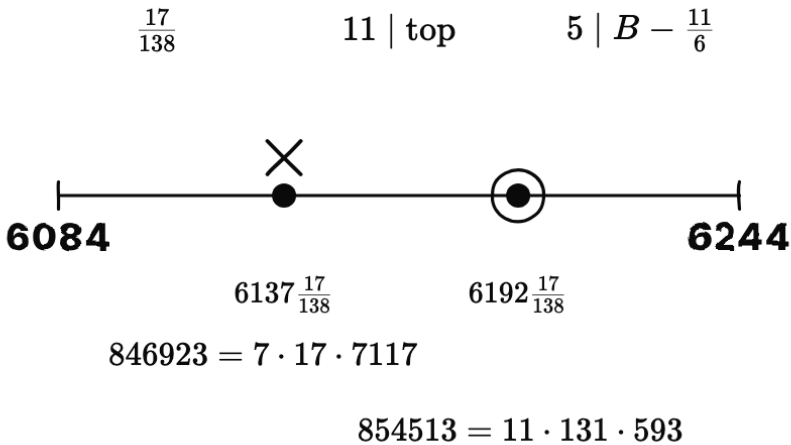
Дробная часть из простых

Сначала дробная часть — то, что остаётся от B_n после отбрасывания целой части. Утверждение двадцать гласит: дробная часть B_n равна $(-1)^{(n/2)}(1/p_1 + 1/p_2 + \dots) - (-1)^{(n/2)}$. Словами: сложите единицы, делённые на каждое простое из знаменателя, и вычтите единицу, а если половина n нечётна, переверните знак у всего выражения. Откуда это берётся: любую дробь, знаменатель которой — произведение различных простых, можно разбить на простые кусочки, по одному на каждое простое, а правило говорит, что эти кусочки — всегда плюс или минус единица, делённая на простое. Для $B_{16} = 3617/510$ простые — 2, 3, 5, 17, и $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17} - 1 = 47/510$; действительно, $3617 = 7 \times 510 + 47$. Для B_{22} знак переворачивается: $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{23} = 17/138$.

Отсюда следует утверждение двадцать один: если G — общий наибольший делитель, а L — общее наименьшее кратное знаменателей B_m и B_n , то L/G — знаменатель $B_m - (-1)^{((m-n)/2)}B_n$. В частности, при равных знаменателях эта разность — целое число: $B_{24} - B_{12}$ — целое, поскольку у обоих внизу 2730, а у $B_{10} + B_{20}$ знаменатель $330/66 = 5$. Он добавляет утверждение двадцать два: если n кратно 4, числитель $B_n - 1/30$ делится на 20, как у $B_{12} - 1/30 = 600/2730 = 20/91$; иначе числитель $B_n/n - 1/12$ делится на 5. И утверждение двадцать три: некоторые числа вроде $2(2^{4n+2} - 1)B_{4n+2}/(2n + 1)$ — целые числа вида $30r + 1$; при $n = 1$ это $2 \times 63 \times (1/42)/3 = 1$.

Параграф десятый собирает всё вместе. Допустим, всё, что вы знаете, — это что B_{22} лежит между 6084 и 6244. Его дробная часть обязана быть $17/138$, числитель обязан делиться на 11, а $B_{22} - 11/6$ обязано делиться на 5. Из 160 целых чисел этого диапазона выживают лишь два: $6137 \frac{17}{138}$ и $6192 \frac{17}{138}$.

Рамануджан выбирает второе, потому что числитель первого делится ещё и на 7 и 17, а он ожидает, что числитель, делённый на 11, будет простым. Ответ, $854513/138$, верен, но довод шаток: $854513 = 11 \times 131 \times 593$, так что и здесь частное не простое.



Двое выживших из 160

Опыт

С калькулятором разделите 846923, числитель первого кандидата, на 7, а затем на 17. Оба деления выходят нацело — именно поэтому Рамануджан отверг этого кандидата.

Чтобы вообще получить такие пределы, ему нужна величина B_n , и параграф одиннадцатый её даёт: $B_n = (2 \cdot n! / (2\pi)^n) (1/1^n + 1/2^n + 1/3^n + \dots)$, равенство двадцать четыре. Словами: число Бернулли — это факториал, делённый на степень $2n$ и умноженный на сумму, едва превышающую единицу. При $n = 2$: $2 \times 2 / (4\pi^2) \times \pi^2/6 = 1/6$ — с помощью знаменитой суммы единиц, делённых на квадраты. Ту же сумму можно записать как произведение по простым числам, и она равна интегралу: $B_n / (2n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} / (e^{2\pi x} - 1) dx$, равенство двадцать пять, которое доказывается разложением дроби в геометрическую прогрессию. Он добавляет два похожих интеграла, один из них — с логарифмом, равенство двадцать шесть.

$$B_n = \frac{2 n!}{(2\pi)^n} \left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots \right)$$

$$\frac{2 \cdot 2}{4\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{B_n}{2n} = \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{e^{2\pi x} - 1} dx$$

$$24.17714 - 10 + 0.91894 + 0.00833 = 15.10441$$

$$\log 3628800 = 15.10441$$

Величина через факториал

Затем он логарифмирует равенство двадцать четыре и использует классическое разложение $\log n! = (n + \frac{1}{2}) \log n - n + \frac{1}{2} \log 2\pi + B_2/(1 \cdot 2n) - B_4/(3 \cdot 4n^3) + \dots$, равенство двадцать семь, где ошибку после любого члена контролирует множитель θ между 0 и 1. При $n = 10$ первые члены дают $24,17714 - 10 + 0,91894 + 0,00833 = 15,10441$, и $\log 10! = \log 3628800 = 15,10441$ совпадает. Значит, целую часть B_n можно найти по его величине, а дробную — по утверждению двадцать; заглавная, отмечает он, в том, что для этого нужны логарифмы с большим числом знаков, чем дают таблицы, — трудность, которую устраняет параграф тринадцатый.

Запомним

Дробная часть B_n равна плюс или минус сумме единиц, делённых на каждое простое из знаменателя, минус единица, поэтому при равных знаменателях разность двух B со знаком — целое число. Вместе с правилами делимости грубые пределы точно определяют B , как для $B_{22} = 854513/138$, хотя использованный там довод о простом частном несостоятелен. Равенство двадцать четыре даёт величину B_n через факториал, степень двух пи и сумму обратных степеней, а разложение логарифма n факториал превращает это в вычисление, которому нужны очень точные логарифмы.

Вопросы

1. Что говорит утверждение двадцать о дробной части B_n ?
 - a. Она равна единице на n
 - b. Она равна плюс или минус сумме единиц, делённых на каждое простое из знаменателя, минус единица
 - c. Она всегда равна одной второй
 - d. Она равна числителю, делённому на n
2. Почему Рамануджан отвергает кандидата $6137 \frac{17}{138}$ для B_{22} ?
 - a. Потому что он лежит вне пределов
 - b. Потому что его числитель делится не только на 11, но и на 7 и 17, а он ожидает, что частное от деления на 11 простое
 - c. Потому что у него неверная дробная часть
 - d. Потому что он не делится на 5
3. Что сообщает равенство двадцать четыре о величине B_n ?
 - a. Это факториал, делённый на степень 21 и умноженный на сумму, едва превышающую единицу
 - b. Оно всегда меньше единицы
 - c. Оно равно n в квадрате
 - d. Это количество простых чисел меньше n
4. Какую практическую трудность отмечает Рамануджан при вычислении целой части по равенству двадцать семь?
 - a. Нужны логарифмы с большим числом знаков, чем дают таблицы
 - b. Нужно значение B_0
 - c. Это работает только при нечётных n

d. Нужна таблица простых чисел

Ответы

1. **b)** Сложите единицы, делённые на каждое простое из знаменателя, и вычтите единицу, а если половина n нечётна, переверните знак у всего выражения.
2. **b)** Он выбирает второго, потому что числитель первого делится ещё и на 7 и 17, а он ожидает, что числитель, делённый на 11, будет простым.
3. **a)** Число Бернулли — это факториал, делённый на степень 2π и умноженный на сумму, едва превышающую единицу.
4. **a)** Загвоздка в том, что для этого нужны логарифмы с большим числом знаков, чем дают таблицы, — трудность, которую устраняет параграф тринадцатый.

Разобранные примеры

B_2 из равенства двадцать четыре С помощью равенства двадцать четыре при $n = 2$ и суммы $1/1^2 + 1/2^2 + \dots = \pi^2/6$ найдите B_2 .

Равенство двадцать четыре гласит: $B_2 = (2 \cdot 2!/(2\pi)^2)(1/1^2 + 1/2^2 + \dots)$.

$2 \cdot 2! = 4$, а $(2\pi)^2 = 4\pi^2$, так что множитель равен $4/(4\pi^2) = 1/\pi^2$.

Умножение на $\pi^2/6$ даёт $1/6$.

Ответ: $B_2 = 1/6$

Задачи

1. С помощью утверждения двадцать найдите дробную часть B_{28} , знаменатель которого $870 = 2 \times 3 \times 5 \times 29$, зная, что половина 28

чётна.

Подсказка: Сложите единицы, делённые на каждое простое, и вычтите единицу.

Ответ: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{29} - 1 = (435 + 290 + 174 + 30 - 870)/870 = 59/870$.

2. Проверьте утверждение двадцать два при $n = 10$: делится ли числитель $B_{10}/10 - 1/12$ на 5? Возьмите $B_{10} = 5/66$.

Подсказка: $B_{10}/10 = 1/132$, а $1/12 = 11/132$.

Ответ: Да: $1/132 - 11/132 = -10/132 = -5/66$, и числитель 5 делится на 5.

3. По первым членам равенства двадцать семь оцените $\log 10!$ и сравните с истинным значением 15,10441.

Подсказка: Вычислите $10,5 \times \log 10 - 10 + \frac{1}{2} \log 2\pi + B_2/(2 \times 10)$, где $\log 10 = 2,302585$, а $\frac{1}{2} \log 2\pi = 0,918939$.

Ответ: $24,177144 - 10 + 0,918939 + 0,008333 = 15,104416$, что совпадает с 15,10441.

Доказательство, которое держится на одном утверждении

Сложите $1/11^2 + 1/12^2 + 1/13^2 + \dots$ — получится около 0,0951663. Есть короткий путь: $1/10 - 1/(2 \times 10^2) + (1/6)/10^3 = 0,0951667$ — уже верно до шестого знака. Этот короткий путь построен из чисел Бернулли, и в параграфе двенадцатом Рамануджан пытается с помощью таких рядов доказать замеченные им закономерности.

$$\frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{13^2} + \dots$$

$$\approx 0.0951663$$

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{2 \cdot 10^2} + \frac{1/6}{10^3} = 0.0951667$$

$$\frac{1}{6} = B_2$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{B_2}{n^3} - \frac{B_4}{n^5} + \frac{B_6}{n^7} - \dots$$

$$\text{remainder} = \int_0^\infty \dots \sinh^2 \pi n x \dots$$

$$\text{next term: } B_4/10^5 \approx 3 \cdot 10^{-7}$$

$$\dots + \frac{B_{2p} \theta}{n^{2p+1}}, \quad 0 < \theta < 1$$

Короткий путь из чисел В

Его отправная точка — равенство двадцать девять, вторая производная $\log \Gamma(n + 1)$, логарифм факториала: $1/(n + 1)^2 + 1/(n + 2)^2 + \dots = 1/n - 1/(2n^2) + B_2/n^3 - B_4/n^5 + B_6/n^7 - \dots$. Словами: хвост суммы обратных квадратов, начиная после n , — это ряд по степеням $1/n$, коэффициенты которого — числа Бернулли. Он получается двукратным дифференцированием разложения $\log n!$ из прошлой части. При $n = 10$ он даёт короткий путь, приведённый выше, а следующий член, $B_4/10^5 \approx 0,0000003$, показывает, как быстро уменьшается ошибка.

Ряд не сходится бесконечно, поэтому он останавливается после некоторого члена и записывает остаток как $B_{2p}\theta/n^{(2p+1)}$, где θ между 0 и 1. Словами: ошибка после остановки составляет долю первого отброшенного члена, не больше. Он подкрепляет это интегральной формулой для остатка с $\text{sh}^2 \pi n x$, так что величина ошибки под контролем.

Теперь главная мысль. Он записывает равенство двадцать восемь — сочетание того же хвоста, члена $1/(2x^2) - 1/x$ и суммы по простым: $-1/(6(x^3 - x)) + 1/(5(x^5 - x)) + 1/(7(x^7 - x)) + 1/(11(x^{11} - x)) + \dots$. Он утверждает, что всё это выражение раскладывается по степеням $1/x$ с целыми коэффициентами, начиная с $1/x^{15} - 7/x^{17} + 55/x^{19} - 529/x^{21} + \dots$. Будь это так, сравнение коэффициентов сделало бы целыми $B_2 - 1/6$, $-B_4 - 1/6 + 1/5$, $B_6 - 1/6 + 1/7$ и так далее. Проверьте их: $1/6 - 1/6 = 0$, $-1/30 - 5/30 + 6/30 = 0$, $1/42 - 7/42 + 6/42 = 0$, а для $B_{14} = 7/6$ имеем $7/6 - 1/6 = 1$ — ровно первый коэффициент справа. Если записать $-1/6$ как $1/2 + 1/3 - 1$, это превращается в утверждение двадцать, правило дробных частей, а из него следует утверждение двадцать один.

РАВЕНСТВО (28)

$$\left[\frac{1}{(x+1)^2} + \dots \right] + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{6(x^3-x)} + \frac{1}{5(x^5-x)} + \frac{1}{7(x^7-x)} + \dots$$



$$= \frac{1}{x^{15}} - \frac{7}{x^{17}} + \frac{55}{x^{19}} - \frac{529}{x^{21}} + \dots \quad \text{ЦЕЛЫЕ?}$$

$$B_2 - \frac{1}{6}, \quad -B_4 - \frac{1}{6} + \frac{1}{5}, \quad B_6 - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}, \dots \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$$

$$-\frac{1}{30} - \frac{5}{30} + \frac{6}{30} = 0$$

$$\frac{1}{42} - \frac{7}{42} + \frac{6}{42} = 0$$

$$B_{14} : \frac{7}{6} - \frac{1}{6} = 1$$

$$B_{10} : \frac{5}{66} - \frac{11}{66} + \frac{6}{66} = 0$$

$$-\frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 20

$$B_{10} - \frac{1}{6} + \frac{1}{11} ?$$

Утверждение и его проверки

Опыт

Проверьте ещё один коэффициент сами: $B_{10} - \frac{1}{6} + \frac{1}{11}$ при $B_{10} = 5/66$. В шестьдесят шестых это $5/66 - 11/66 + 6/66 = 0$ — целое, как и требует утверждение.

Он повторяет этот приём дважды. Заменив n на $1/2n$ в равенстве двадцать девять и вычтя половину результата, он получает знакопеременный хвост $1/(n+1)^2 - 1/(n+2)^2 + \dots$, равенство тридцать, с коэффициентами $(2^{(2p)} - 1)B_{2p}$; если бы у удвоенного хвоста были целые коэффициенты, вторая часть утверждения шестнадцать — нечётность $2(2^n - 1)B_n$ — следовала

бы. Из первой производной $\log n!$, равенства тридцать один с постоянной Эйлера γ , он получает равенство тридцать два для $1/(n+2) - 1/(n+4) + 1/(n+6) - \dots$; целые коэффициенты там дали бы первую часть утверждения шестнадцать.

Каждый путь кончается словами «если мы сможем доказать», и он так и не доказывает. Редакторы отмечают, что эти утверждения о целых коэффициентах нигде не доказаны и что в некоторых шагах используются расходящиеся ряды, так что доводы — лишь наброски; сами результаты верны и были известны фон Штаудту и Клаузену, а также Эйлеру.

Запомним

Хвост суммы обратных квадратов имеет ряд по степеням единицы на n с коэффициентами Бернулли, и при его обрыве остаётся ошибка, которую контролирует множитель тета между нулём и единицей. Рамануджан сводит правило дробных частей и утверждения о нечётности к утверждениям, что некоторые ряды имеют целые коэффициенты; первые коэффициенты действительно выходят равными 0, 0, 0, а затем 1. Эти утверждения в статье так и не доказаны, так что параграф двенадцатый — путь к доказательствам, а не доказательство.

Вопросы

1. Что выражает равенство двадцать девять?

- a. Хвост суммы обратных квадратов как ряд по степеням $1/n$ с коэффициентами Бернулли
 - b. Значение π
 - c. Знаменатель каждого B_n
 - d. Сумму всех чисел Бернулли
2. Что сообщает множитель θ между 0 и 1?
- a. Что ошибка после остановки составляет долю первого отброшенного члена
 - b. Что ряд сходится к θ
 - c. Что каждый коэффициент лежит между 0 и 1
 - d. Что числа Бернулли меньше 1
3. Почему параграф двенадцатый — путь к доказательствам, а не доказательство?
- a. Потому что утверждения о целых коэффициентах, на которых он держится, так и не доказаны
 - b. Потому что проверенные вручную коэффициенты неверны
 - c. Потому что закономерности ложны
 - d. Потому что в нём нет чисел Бернулли

Ответы

1. a) Хвост суммы обратных квадратов, начиная после n , — это ряд по степеням $1/n$, коэффициенты которого — числа Бернулли.
2. a) Ошибка после остановки составляет долю первого отброшенного члена, не больше.

3. а) Каждый путь кончается словами «если мы сможем доказать», а утверждения о целых коэффициентах в статье так и не доказаны.

Разобранные примеры

Хвост при $n = 10$ Оцените $1/11^2 + 1/12^2 + 1/13^2 + \dots$ по первым членам равенства двадцать девять при $n = 10$ и скажите, как велик следующий член.

Первые члены — $1/n - 1/(2n^2) + B_2/n^3$, где $B_2 = 1/6$.

При $n = 10$ это $0,1 - 0,005 + 0,000167 = 0,095167$.

Следующий член равен $-B_4/n^5 = -(1/30)/100000$, около $-0,0000003$.

Значит, хвост — около $0,0951663$, а ошибка после трёх членов не больше примерно трёх десятимиллионных.

Ответ: Около $0,0951663$

Задачи

1. Проверьте, что коэффициент $B_6 = \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ — целое число, при $B_6 = 1/42$.

Подсказка: Приведите всё к знаменателю 42.

Ответ: $1/42 - 7/42 + 6/42 = 0$ — целое.

2. Проверьте, что коэффициент $B_{14} = \frac{1}{6}$ равен первому коэффициенту 1 в правой части равенства двадцать восемь, при $B_{14} = 7/6$.

Подсказка: Вычтите одну шестую из семи шестых.

Ответ: $7/6 - 1/6 = 1$, что совпадает с членом $1/x^{15}$.

3. Объясните словами, как запись $-\frac{1}{6}$ в виде $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1$ превращает целые коэффициенты в правило дробных частей.

Подсказка: Посмотрите, какие числа, обратные простым, появляются.

Ответ: Каждый целый коэффициент — это $\pm B_n$ плюс единица, делённая на каждое относящееся к нему простое, где $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ берутся из $-\frac{1}{6}$, минус единица. Сказать, что сумма — целое число, значит сказать, что дробная часть B_n равна $\pm$ этой сумме обратных величин минус единица, а это и есть утверждение двадцать.

Сколько цифр — и следующее значение по предыдущему

Сколько цифр у числа 2^{100} ? Перемножать не нужно: $100 \times \log_{10} 2 = 30,103$, значит, цифр 31, а поскольку $10^{0,103} \approx 1,268$, оно начинается со 126. Рамануджан делает то же для чисел Бернулли, слишком больших, чтобы их выписать.

$$2^{100}$$

$$100 \times \log_{10} 2 = 30.103 \Rightarrow 31 \text{ digits}$$

$$10^{0.103} \approx 1.268 \Rightarrow \text{starts } 126$$

$$\log_{10} B_n \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \log_{10} n - 1.2324743503 n + 0.700120$$

$$\text{true value} \approx \dots + 0.0362/n$$

$$\log_e B_n \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \log_e n - n(1 + \log_e 2\pi) + \frac{1}{2} \log_e 8\pi$$

$$(1 + \log_e 2\pi) \times 0.4342945 = 1.2324744$$

$$20.5 \times 1.30103 - 24.64949 + 0.70012 = 2.72175$$

$$+ 0.0018 = 2.72356, \quad 10^{2.72356} \approx 529.1$$

Цифры из логарифма

Результат тридцать три: $\log_{10} B_n = (n + 1/2) \log_{10} n - 1,2324743503 n + 0,700120$, причём истинное значение больше примерно на $0,0362/n$. Словами: число цифр B_n растёт чуть быстрее, чем n ,

умноженное на число цифр n . Откуда это берётся:
 прологарифмируйте равенство двадцать четыре, замените $\log n!$
 его старшими членами, что даёт $\log_e B_n \approx (n + 1/2) \log_e n - n(1 + \log_e 2\pi) + 1/2 \log_e 8\pi$, и умножьте на $\log_{10} e = 0,4342944819$, чтобы
 перейти к основанию десять. Проверьте постоянную: $(1 + \log_e 2\pi) \times 0,4342945 = 2,8378771 \times 0,4342945 = 1,2324744$. При $n = 20$:
 $20,5 \times 1,30103 - 24,64949 + 0,70012 = 2,72175$; прибавив
 $0,0362/20 = 0,0018$, получаем $2,72356$, а $10^{2,72356} \approx 529,1$ —
 ровно величина B_{20} .

Параграф четырнадцатый сравнивает соседей. Деление
 равенства двадцать четыре для n на то же для n минус 2 даёт
 равенство тридцать четыре: $B_n = (n(n-1)/(4\pi^2)) B_{n-2} (1 - (2^2 - 1)/(2^n - 1))(1 - (3^2 - 1)/(3^n - 1)) \dots$. Словами: каждое B равно
 предыдущему, умноженному на $n(n-1)/(4\pi^2)$ и исправленному
 множителями, которые почти ровно равны 1, как только n
 умеренно велико. Поэтому, результат тридцать пять, отношение
 B_n/B_{n-2} очень быстро стремится к $n(n-1)/(4\pi^2)$.

СОСЕДИ

$$B_n = \frac{n(n-1)}{4\pi^2} B_{n-2} \underbrace{\left(1 - \frac{3}{2^n - 1}\right) \left(1 - \frac{8}{3^n - 1}\right) \cdots}_{\approx 1}$$

$$\frac{B_n}{B_{n-2}} \rightarrow \frac{n(n-1)}{4\pi^2}$$



B_{20}

$$B_{20} \in (529, 530) \rightarrow \frac{174611}{330}$$

B_{18}

B_{16}

$$6.079 \times \frac{7}{6} \approx 7.09 \Rightarrow 7 < B_{16} < 8$$

B_{14}

$$B_{16} = 7 \frac{47}{510} = \frac{3617}{510}$$

Лестница отношений

Это даёт лестницу. Умножьте предыдущее B на $n(n-1)/(4\pi^2)$, чтобы узнать, между какими двумя целыми лежит следующее, а затем прибавьте дробную часть из утверждения двадцать. Для B_{16} : $(15 \times 16/(4\pi^2)) \times 7/6 = 6,079 \times 1,1667 \approx 7,09$, между 7 и 8; дробная часть равна $47/510$, так что $B_{16} = 7 \frac{47}{510} = 3617/510$. Таблица Рамануджана проходит так ступень за ступенью до B_{20} , которое лежит между 529 и 530 и выходит равным $528 + 1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/11 = 174611/330$.

Опыт

На калькуляторе умножьте $43867/798$, значение B_{18} , на $380/(4\pi^2)$. Должно получиться около $529,1$, так что B_{20} лежит между 529 и 530 , как и говорит таблица.

$$\frac{43867}{798} \times \frac{380}{4\pi^2}$$

$$\approx 529.1$$

$$529 < B_{20} < 530$$



digits from $\log_{10} B_n$

$$\frac{B_n}{B_{n-2}} \rightarrow \frac{n(n-1)}{4\pi^2}$$

whole part + fraction = exact

Попробуйте на калькуляторе

Запомним

Результат тридцать три даёт логарифм B_n , а значит, число его цифр и первые цифры, по одному n ; для B двадцать он предсказывает около 529. Равенство тридцать четыре говорит, что каждое B равно предыдущему, умноженному на $n(n - 1)/(4\pi^2)$ и на поправочные множители, близкие к 1, так что отношение быстро устанавливается. Умножение, позволяющее найти два целых, между которыми лежит B , и прибавление дробной части из утверждения двадцать дают его точное значение ступень за ступенью.

Вопросы

1. Откуда берётся результат тридцать три?
 - a. Из логарифмирования равенства двадцать четыре с сохранением старших членов $\log n!$ и переходом к основанию десять
 - b. Из таблицы знаменателей
 - c. Из равенства двенадцать
 - d. Из кубических корней из единицы
2. Что говорит равенство тридцать четыре о B_n по сравнению с B_{n-2} ?
 - a. B_n равно B_{n-2} , умноженному на $n(n - 1)/(4\pi^2)$ и на поправочные множители, близкие к 1
 - b. B_n вдвое больше B_{n-2}

- с. V_n равно V_{n-2} плюс один
 - d. V_n равно V_{n-2} , делённому на π
3. Как лестница параграфа четырнадцатого даёт точные значения?
- a. Находя по предыдущему V два целых, между которыми лежит следующее, и прибавляя дробную часть из утверждения двадцать
 - b. Округляя до ближайшего целого
 - с. Используя только знаменатель
 - d. Вычисляя $\log_{10} e$

Ответы

1. a) Прологарифмируйте равенство двадцать четыре, замените $\log n!$ его старшими членами и умножьте на $\log_{10} e$, чтобы перейти к основанию десять.
2. a) Каждое V равно предыдущему, умноженному на $n(n-1)/(4\pi^2)$ и исправленному множителями, почти ровно равными 1, как только n умеренно велико.
3. a) Умножьте предыдущее V на $n(n-1)/(4\pi^2)$, чтобы узнать, между какими двумя целыми лежит следующее, а затем прибавьте дробную часть из утверждения двадцать.

Разобранные примеры

Величина V_{20} по результату тридцать три C помощью результата тридцать три при $n = 20$, с поправкой $0,0362/n$, оцените V_{20} .

$$(n + 1/2) \log_{10} n = 20,5 \times 1,30103 = 26,67112.$$

Вычтем $1,2324743503 \times 20 = 24,64949$ и прибавим $0,70012$:
получится $2,72175$.

Прибавим поправку $0,0362/20 = 0,00181$ и получим $2,72356$.
 $10^{2,72356}$ — около $529,1$.

Ответ: Около $529,1$, что совпадает с $B_{20} = 174611/330$

Задачи

1. С помощью отношения $17 \times 18/(4\pi^2)$ и $B_{16} = 3617/510$, около $7,0922$, найдите, между какими целыми лежит B_{18} .

Подсказка: $4\pi^2$ — около $39,478$.

Ответ: $306/39,478$ — около $7,751$, а $7,751 \times 7,0922$ — около $54,97$, так что B_{18} лежит между 54 и 55 .

2. Сколько цифр у 2^{100} , если $\log_{10} 2 = 0,30103$?

Подсказка: Умножьте на 100 и посмотрите на целую часть.

Ответ: $100 \times 0,30103 = 30,103$, так что у 2^{100} тридцать одна цифра.

Описание великана и пятикратные сита

У B_{444} больше шестисот цифр — слишком много, чтобы выписать их от руки в 1911 году. И всё же Рамануджан подробно описывает это число, пользуясь лишь средствами прежних параграфов. Сегодня система компьютерной алгебры печатает его за секунду, так что мы можем проверить каждое его утверждение.

$$B_{444} = \frac{N}{D}$$

$$(p - 1) \mid 444 : \quad 2, 3, 5, 7, 13, 149, 223$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 149 \cdot 223 = 90709710$$

$$\text{fraction} = \frac{23975417}{90709710}$$

$$37 \mid N$$

$$\log_{10} B_{444} \approx 630.2433$$

ЦЕЛОЕ: 631 ЦИФРА, 1751...

$$\log_{10} N \approx 630.2433 + 7.9577 = 638.2010$$

N: 639 ЦИФР, 1588...

B_{444} : величина и дробь

Запишем $B_{444} = N/D$. Простые множители D даёт правило знаменателей: это простые числа, на единицу большие какого-

нибудь делителя 444, то есть 2, 3, 5, 7, 13, 149 и 223. Тогда утверждение двадцать даёт дробную часть $23975417/90709710$, и действительно, $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 \times 149 \times 223 = 90709710$.

Утверждение восемнадцать говорит, что 37 — простое число, которое делит 444, но отсутствует в D, — делит N.

Результат тридцать три даёт $\log_{10} B_{444} \approx 630,2433$. Словами: в целой части 631 цифра, а поскольку $10^{0,2433} \approx 1,751$, она начинается с 1751. Прибавив $\log_{10} D = \log_{10} 90709710 \approx 7,9577$, получаем $\log_{10} N \approx 638,2010$: в числителе 639 цифр, и он начинается с 1588.

Теперь последние цифры. Утверждение двадцать два говорит, что числитель $B_{444} - 1/30$ делится на 20, потому что 444 кратно 4. Обозначим целую часть $[B_{444}]$; тогда $[B_{444}] + 23975417/90709710 - 1/30 = [B_{444}] + 698392/3023657$. Её числитель $3023657 \times [B_{444}] + 698392$ должен оканчиваться на 0 с чётной цифрой десятков, а это заставляет целую часть оканчиваться на 4 с чётной цифрой перед ней; отсюда N оканчивается на 57 с чётной третьей с конца цифрой. Современное вычисление всё это подтверждает: целая часть оканчивается на 44, а N — на 657. Единственное шаткое звено — утверждение, что $N/37$ — простое число: оно опирается на недоказанное утверждение четырнадцать.

ЦИФРЫ В КОНЦЕ

$$20 \mid \text{top of } (B_{444} - \frac{1}{30})$$

$$[B_{444}] + \frac{23975417}{90709710} - \frac{1}{30} = [B_{444}] + \frac{698392}{3023657}$$

$$3023657k + 698392 \equiv 0 \pmod{20}$$

k ends ...e4

N ends ...e57



ЭВМ: ...44, ...657

$$\frac{N}{37} \text{ prime? (rests on 14)}$$

$$7k + 2 \text{ ends in } 0$$

$$\Rightarrow 7k \text{ ends in } 8 \Rightarrow k \text{ ends in } 4$$

Последние цифры

Опыт

Проверьте арифметику последнего шага на бумаге: какой должна быть последняя цифра k , чтобы $3023657 \times k + 698392$ делилось на двадцать? Последняя цифра произведения — это последняя цифра $7k$, и вместе с 2 она должна дать 0, так что $7k$ оканчивается на 8, а k — на 4.

Параграф шестнадцатый замечает, что тангенс и косеканс могут заменить котангенс. Один из результатов — равенство тридцать шесть: $(4/3)B_n(2^n - 1) = c_6B_{n-6}(2^{n-6} - 1) - c_{12}B_{n-12}(2^{n-12} - 1) + \dots$, плюс последний член $1/3n$ или $1/6n$ с некоторым знаком. При n ,

равном 6: $(4/3) \times (1/42) \times 63 = 2$, а последний член равен $1/3 \times 6 = 2$. Равенство тридцать семь делает то же с множителями $1 - 1/2^{n-4}$ и степенями 3; при n , равном 5, обе части равны $5/6$.

CTG

TG

COSEC

$$\frac{4}{3}B_n(2^n - 1) = c_6B_{n-6}(2^{n-6} - 1) - c_{12}B_{n-12}(2^{n-12} - 1) + \dots$$

$$+ \frac{1}{3}n \text{ or } \frac{1}{6}n (\pm)$$

$$n = 6 : \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{42} \cdot 63 = 2 = \frac{1}{3} \cdot 6 \quad \checkmark$$

$$(37) : 1 - \frac{1}{2^{n-4}}, 3^k$$

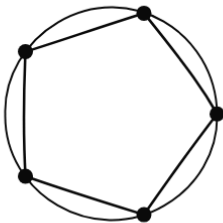
$$n = 5 : \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \quad \checkmark$$

$$1, 2, 3\text{-interval} \rightarrow \omega^p = 1 \text{ (or } i) \rightarrow p\text{-interval}$$

Тангенс, косеканс, интервалы

Параграф семнадцатый даёт имя всему семейству: равенства из параграфов один, три и четыре — это формулы с интервалом один, два и три, а корни степени p из единицы, или из i при чётном p , дают формулы с интервалом p . Он разбирает случай p , равного 5, с корнями пятой степени 1, α , α^2 , α^3 , α^4 . Сложение их синусов даёт $\varphi(x) = 5(x^5/5! - x^{15}/15! + \dots)$: сокращается всё, кроме каждой десятой степени, — пятикратный вариант качелей. Золотое сечение входит через числа $\alpha_n = ((1 + \sqrt{5})/2)^n + ((1 - \sqrt{5})/2)^n$, которые оказываются целыми: 1, 3, 4, 7, 11 и так далее.

Равенство тридцать восемь, $5(B_0 + B_{10}x^{10}/10! + B_{20}x^{20}/20! + \dots)$
 $= -x ((x^4/4!)(1 + \alpha_5) - \dots) / ((x^5/5!)(1 + \alpha_5) - \dots)$, оставляет каждое
 десятое B ; его старший член равен $-x(x^4/24)/(x^5/120) = -5$, что
 совпадает с $5B_0$. Равенства с тридцать девятого по сорок второе
 дают остальные четыре нити, а похожее тождество с косинусами
 и функцией ψ даёт ещё больше.



$$\varphi(x) = 5\left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^{15}}{15!} + \dots\right)$$

КАЖДАЯ ДЕСЯТАЯ

$$\alpha_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

1, 3, 4, 7, 11, ...



$$-x \cdot \frac{x^4/24}{x^5/120} = -5 = 5B_0 \quad \checkmark$$

ЕЩЁ 4 НИТИ И КОСИНУСЫ

Пятикратное сито

Запомним

Для B_{444} Рамануджан находит дробную часть, количество цифр и первые цифры целой части и числителя, а также их последние цифры — всё это сегодня подтверждено; только утверждение о простом частном опирается на недоказанное утверждение. Тангенс и косеканс дают новые соотношения того же рода, проверенные для малых n . Корни степени p из единицы дают формулы с интервалом p ; при p , равном 5, появляются целые числа золотого сечения, и каждая нить сохраняет каждое десятое число Бернулли.

Вопросы

1. Как Рамануджан находит знаменатель D числа B_{444} ?
 - a. По правилу знаменателей: перемножив простые числа, на единицу большие делителей 444
 - b. Вычислив B_{444} целиком
 - c. По равенству двенадцать
 - d. По формуле для цифр
2. Почему в целой части B_{444} 631 цифра?
 - a. Потому что $\log_{10} B_{444}$ — около 630,2433
 - b. Потому что у 444 три цифры
 - c. Потому что у D восемь цифр
 - d. Потому что числитель делится на 37

3. Какое звено в описании B_{444} шаткое?

- a. Утверждение, что $N/37$ — простое число: оно опирается на недоказанное утверждение четырнадцать
- b. Количество цифр
- c. Дробная часть
- d. Последние цифры

Ответы

- 1. a) Простые множители D даёт правило знаменателей: это простые числа, на единицу большие какого-нибудь делителя 444, то есть 2, 3, 5, 7, 13, 149 и 223.
- 2. a) Результат тридцать три даёт $\log_{10} B_{444} \approx 630,2433$, так что в целой части 631 цифра.
- 3. a) Единственное шаткое звено — утверждение, что $N/37$ — простое число: оно опирается на недоказанное утверждение четырнадцать.

Разобранные примеры

Цифры числителя B_{444} Зная, что $\log_{10} B_{444} \approx 630,2433$ и $D = 90709710$, найдите количество цифр и первые цифры числителя N .

$$\log_{10} N = \log_{10} B_{444} + \log_{10} D.$$

$$\log_{10} 90709710 \text{ — около } 7,9577.$$

$$\text{Значит, } \log_{10} N \approx 630,2433 + 7,9577 = 638,2010.$$

Целая часть 638 означает 639 цифр, а $10^{0,2010} \approx 1,588$ даёт первые цифры 1588.

Ответ: 639 цифр, начиная с 1588

Задачи

1. Выпишите делители 444, прибавьте к каждому единицу и оставьте простые. Чему равно их произведение?

Подсказка: $444 = 4 \times 3 \times 37$; его делители: 1, 2, 3, 4, 6, 12, 37, 74, 111, 148, 222, 444.

Ответ: С прибавленной единицей получается 2, 3, 4, 5, 7, 13, 38, 75, 112, 149, 223, 445; простые среди них — 2, 3, 5, 7, 13, 149, 223, а их произведение равно 90709710.

2. Проверьте равенство тридцать шесть при $n = 6$, взяв $B_6 = 1/42$.

Подсказка: Левая часть равна $(4/3)B_6(2^6 - 1)$; правая сводится к последнему члену — трети от шести.

Ответ: $(4/3) \times (1/42) \times 63 = 2$, и треть от 6 тоже 2, так что обе части совпадают.

Четырёхкратные сита и вердикт редакторов

Пятикратное сито из прошлой части использовало золотое сечение; четырёхкратное использует его родственника — корень из двух. Рамануджан строит его на двух последовательностях: $a_n = (1 + 1/\sqrt{2})^n + (1 - 1/\sqrt{2})^n$ и $b_n = (1 + 1/\sqrt{2})^n - (1 - 1/\sqrt{2})^n$.

Словами: сложите или вычтите эн-е степени двух чисел, иррациональные части которых сокращаются или удваиваются. При n , равном 2: $(1 + 1/\sqrt{2})^2 + (1 - 1/\sqrt{2})^2 = 2 \times (1 + 1/2) = 3$, потому что перекрёстные члены $\pm\sqrt{2}$ сокращаются; значит, $a_2 = 3$. Они подчиняются правилам вроде $a_{m+n} = a_m a_n - a_{m-n}/2^n$, которые позволяют строить каждое значение из предыдущих.

$$1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

ГАСЯТСЯ ИЛИ ×2

$$(1 + \sqrt[4]{2} + \frac{1}{2}) + (1 - \sqrt[4]{2} + \frac{1}{2}) = 3 = a_2$$

$$a_{m+n} = a_m a_n - a_{m-n}/2^n$$

(43)–(46): strands spaced 8

$$4\left(B_0 + \frac{B_8 x^8}{8!} + \dots\right) = -x \frac{\frac{x^3}{3!} a_2 - \frac{x^{11}}{11!} a_6 + \dots}{\frac{x^4}{4!} a_2 - \frac{x^{12}}{12!} a_6 + \dots}$$

$$-x \cdot \frac{x^3/6}{x^4/24} = -4 = 4B_0 \quad \checkmark$$

Помощники из корня из двух

С их помощью он записывает четыре формулы, равенства с сорок третьего по сорок шестое, — по одной на каждую нить чисел Бернулли с шагом восемь. Первая: $4(B_0 + B_8 x^8/8! + B_{16} x^{16}/16! + \dots) = -x ((x^3/3!)a_2 - (x^{11}/11!)a_6 + \dots) / ((x^4/4!)a_2 - (x^{12}/12!)a_6 + \dots)$. Проверьте её старший член: $-x (x^3/6)/(x^4/24) = -4$, и левая часть начинается с $4B_0 = -4$, как и должно быть. Остальные оставляют B_2, B_{10}, B_{18} , затем B_4, B_{12}, B_{20} с множителем $4\sqrt{2}$, затем B_6, B_{14}, B_{22} . На этом статья заканчивается: одна идея — корни из единицы, сокращающие члены, — даёт сита любого размера.

$$B_0, B_8, B_{16}, \dots$$

$$B_2, B_{10}, B_{18}, \dots$$

$$B_4, B_{12}, B_{20}, \dots \quad (4\sqrt{2})$$

$$B_6, B_{14}, B_{22}, \dots$$

ЛЮБЫЕ СИТА

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = 2\left(1 + \frac{3}{2}\right) = 5$$

$$\checkmark \sqrt{2} \text{ terms cancel} \Rightarrow a_3 = 5$$

Четыре нити и ещё шаг

Опыт

Проверьте последовательность сами ещё на шаг дальше: $a_3 = (1 + 1/\sqrt{2})^3 + (1 - 1/\sqrt{2})^3 = 2(1 + 3/2) = 5$. Члены с $\sqrt{2}$ снова сокращаются, как и для a_2 , так что a_3 — тоже целое число.

Затем в книге идёт примечание редакторов собрания статей, и его стоит прочитать внимательно, потому что оно сортирует всё, что мы встретили, по степени надёжности. Сначала мелкие уточнения: Рамануджан пишет B_{2n} там, где в большинстве книг пишут B_n , а c_k — это биномиальный коэффициент $n!/(k!(n-k)!)$. Равенство двенадцать верно при нечётном n больше 1, причём

последний член принимает три вида в зависимости от остатка n при делении на 6.

РЕДАКТОРЫ

$B_{2n} \leftrightarrow B_n$

$c_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

(12): odd $n > 1$

after (27), (29): invalid

×

20: ШТАУДТ-КЛАУЗЕН, 16: ЭЙЛЕР

НАБРОСОК ДОК. СЛЕДСТВИЕ

ГИПОТЕЗА

16, 20, 21

17, 18

14, 15, 19

rest on (28), (30), (32)

НЕ ДОКАЗАНО

Редакторы сортируют утверждения

Теперь по существу. Выводы после равенств двадцать семь и двадцать девять в таком виде неверны, потому что ряд под интегралом расходится, когда x доходит до n . Основные результаты статьи были уже известны: утверждение двадцать — это теорема фон Штаудта — Клаузена, а утверждение шестнадцать, которое из неё следует, знал ещё Эйлер. Из восьми арифметических утверждений, с четырнадцатого по двадцать первое, доказательства указаны для шестнадцатого, двадцатого и двадцать первого, но они опираются на равенство двадцать восемь и соответствующие утверждения о рядах тридцать и

тридцать два, которые так и не доказаны. Семнадцатое и восемнадцатое поданы как следствия, а четырнадцатое, пятнадцатое и девятнадцатое — просто как гипотезы.

Так что статья, по словам редакторов, интересна как образец самой ранней манеры Рамануджана: быстрые методы, заново открытая знаменитая теорема и смелые закономерности, прочитанные по таблице, — а доказательства ещё впереди. Этот курс прошёл вместе с ней путь от котангенса до этого вердикта, и здесь он заканчивается.

**БЫСТРЫЕ МЕТОДЫ
ОТКРЫТО ЗАНОВО
СМЕЛЫЕ УЗОРЫ**

ЧУТЬЁ

»ДОКАЗ.

КОНЕЦ

НИТИ ЧЕРЕЗ 8, ИЗ $1 \pm 1/\sqrt{2}$

ИТОГИ ИЗВЕСТНЫ, ПРОБЕЛЫ

СЧЁТ ДО СТРОГОСТИ

Самая ранняя манера

Запомним

Формулы с интервалом четыре используют последовательности, построенные из единицы плюс или минус единица, делённая на корень из двух, и каждая выделяет нить чисел Бернулли с шагом восемь; их старшие члены сходятся с B_0 и B_2 . Примечание редакторов уточняет обозначения и определяет статус всего сказанного: некоторые выводы в записанном виде неверны, основные результаты были известны фон Штаудту, Клаузену и Эйлеру, указанные доказательства опираются на недоказанные утверждения о рядах, а три утверждения — гипотезы, и одна из них ложна. Если читать статью вместе с этим примечанием, она показывает самую раннюю манеру Рамануджана: мощные вычисления и чутьё — раньше строгого доказательства.

Вопросы

1. Что выделяют формулы с интервалом четыре?
 - a. Нити чисел Бернулли с шагом восемь, например B_0 , B_8 , B_{16}
 - b. Каждое второе число Бернулли
 - c. Только B_2
 - d. Числа Бернулли с нечётными номерами

2. Почему редакторы называют выводы после равенств двадцать семь и двадцать девять неверными в таком виде?
- a. Потому что ряд под интегралом расходится, когда x доходит до n
 - b. Потому что в них неверное значение π
 - c. Потому что интегралы равны нулю
 - d. Потому что числа B отрицательны
3. Какие утверждения, по словам редакторов, высказаны лишь как гипотезы?
- a. Четырнадцатое, пятнадцатое и девятнадцатое
 - b. Шестнадцатое, двадцатое и двадцать первое
 - c. Семнадцатое и восемнадцатое
 - d. Двадцать второе и двадцать третье

Ответы

1. **a)** Равенства с сорок третьего по сорок шестое дают по одной формуле на каждую нить чисел Бернулли с шагом восемь.
2. **a)** Выводы в таком виде неверны, потому что ряд под интегралом расходится, когда x доходит до n .
3. **a)** Семнадцатое и восемнадцатое поданы как следствия, а четырнадцатое, пятнадцатое и девятнадцатое — просто как гипотезы.

Разобранные примеры

Последовательность a_n при малых n Вычислите a_2 и a_3 , где $a_n = (1 + 1/\sqrt{2})^n + (1 - 1/\sqrt{2})^n$.

При $n = 2$ имеем $(1 \pm 1/\sqrt{2})^2 = 1 \pm \sqrt{2} + 1/2$, и при сложении $\pm\sqrt{2}$ сокращается.

Значит, $a_2 = 2 \times (1 + 1/2) = 3$.

При $n = 3$ имеем $(1 \pm 1/\sqrt{2})^3 = 1 \pm 3/\sqrt{2} + 3/2 \pm 1/(2\sqrt{2})$, и при сложении члены с $\sqrt{2}$ сокращаются.

Значит, $a_3 = 2 \times (1 + 3/2) = 5$.

Ответ: $a_2 = 3$ и $a_3 = 5$

Задачи

1. Проверьте старший член равенства сорок три: чему при малом x равно $-x (x^3/3!)a_2 / ((x^4/4!)a_2)$?

Подсказка: Множители a_2 сокращаются.

Ответ: $-x (x^3/6)/(x^4/24) = -4$, что совпадает с $4B_0 = -4$.

2. На что, по словам редакторов, опираются указанные доказательства утверждений шестнадцать, двадцать и двадцать один?

Подсказка: Вспомните ряды из параграфа двенадцатого.

Ответ: На равенство двадцать восемь и соответствующие утверждения о рядах тридцать и тридцать два, которые так и не доказаны.