

Собрание статей Сринивасы Рамануджана



Srinivasa Ramanujan · 1927

Иллюстрированные аудиолекции

Lecturized

Собрание статей Сринивасы Рамануджана

Иллюстрированные аудиолекции

Srinivasa Ramanujan · 1927

Пересказано в иллюстрированных лекциях Lecturized
lecturized.com

По оригиналу: Collected Papers of Srinivasa Ramanujan, ed. G. H. Hardy, P. V. Seshu
Aiyar and B. M. Wilson (Cambridge, 1927)

Содержание

Семейство дробей в котангенсе

Шаги по шесть

Двадцать дробей и закономерности в них

Рецепт для знаменателей

Определяем число по его величине

Путь к доказательству — с одним разрывом

Описываем великана, не выписывая его

Другие отправные точки и пятикратные сита

Четырёхкратное сито и окончательный вердикт

Семейство дробей в котангенсе

Переключите калькулятор на радианы, наберите одну десятую, возьмите её тангенс и разделите одну десятую на результат. Получится число чуть-чуть меньше единицы: ноль запятая девять, девять, шесть, шесть, шесть, четыре, четыре. Теперь пойдите другим путём: начните с единицы, отнимите одну сотую, делённую на три, и отнимите одну десятитысячную, делённую на сорок пять. Выходят те же цифры. Эти делители, три и сорок пять, не случайны: они построены из семейства дробей, которые называют числами Бернулли, и первая статья, которую Рамануджан вообще опубликовал, в 1911 году, — именно о них.

КАЛЬКУЛЯТОР

0.9966644

$$1 - \frac{0.01}{3} - \frac{0.0001}{45}$$

$$= \mathbf{0.9966644}$$

$$x \cot x = 1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{(2x)^2}{2!} - \frac{1}{30} \cdot \frac{(2x)^4}{4!} - \dots$$

$$\text{zeroth} = -1$$

$$\text{first} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{x^2}{3}$$

$$\text{second} = \frac{1}{30} \Rightarrow \frac{x^4}{45}$$

$$x = 0.1 : \quad \frac{x^2}{3} = \frac{0.01}{3}, \quad \frac{x^4}{45} = \frac{0.0001}{45}$$

Две дороги, те же цифры

Рамануджан начинает с функции из школьной тригонометрии: x , умноженный на котангенс x , где котангенс — это косинус, делённый на синус. Вблизи нуля эту функцию можно записать как единицу, минус небольшая доля от x в квадрате, минус ещё меньшая доля от x в четвёртой степени, и так далее по всем чётным степеням. Каждую из этих долей он договаривается записывать через особое число: первое число Бернулли, второе, третье и так далее, каждое делённое на факториал и умноженное на степень удвоенного x . При его способе счёта все они положительны, а чтобы и свободный член, единица, вошел в ту же закономерность, он объявляет нулевое число Бернулли равным минус единице. Если первое равно одной шестой, первая доля получается такой: одна шестая, пополам, умножить на

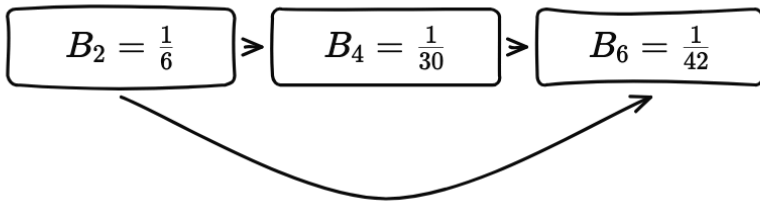
четыре — это одна третья; если второе равно одной тридцатой, следующая доля равна одной сорок пятой. Это ровно рецепт калькулятора: ряд котангенса несёт эти дроби в себе.

Как же вытащить дроби наружу? Рамануджан записывает котангенс тремя разными способами: как косинус, делённый на синус; как синус удвоенного угла, делённый на единицу минус косинус удвоенного угла; и как единицу плюс этот косинус, делённую на тот же синус. Каждый числитель и каждый знаменатель — известный степенной ряд. Умножьте обе части такого равенства на знаменатель, и вы получите два ряда, которые обязаны быть равны; а два ряда равны, только когда при каждой степени x в обеих частях стоит один и тот же коэффициент. Поэтому сравнение, скажем, коэффициентов при x в шестой степени даёт одно уравнение, связывающее числа Бернулли, перед которыми стоят числа-счётчики — биномиальные коэффициенты. Он получает три семейства таких уравнений: одно для нечётных степеней с дополнительными степенями двойки, одно для чётных степеней и одно для нечётных степеней больше единицы.

$$(x \cot x)^2 = -x^2 \left(1 + \frac{d \cot x}{dx} \right)$$

$$\frac{5}{2} B_4 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^2 = \frac{1}{12}$$

$$\frac{d \tan x}{dx} = 1 + \tan^2 x$$



ВСЕ ПРЕЖНИЕ

Сравниваем степени, по одному В

Вот чётное семейство в деле. Сравнение при четвёртой степени даёт: шесть раз первое число Бернулли, плюс один, минус два, равно нулю; значит, первое равно одной шестой. Сравнение при шестой степени даёт: пятнадцать раз второе, минус пятнадцать шестых, минус один, плюс три, равно нулю; значит, второе равно одной тридцатой. Сравнение при восьмой степени даёт для третьего одну сорок вторую. Каждый шаг работает, но каждому шагу нужны и все прежние числа Бернулли, примерно половина номера членов, и Рамануджан прямо говорит, что это становится утомительным.

Его первое улучшение возводит ряд в квадрат. Есть точное тождество: $x \cot x$ в квадрате равно минус x квадрат,

умноженному на единицу плюс производная котангенса. Поскольку обе части можно записать через числа Бернулли, сравнение коэффициентов теперь даёт соотношение из произведений двух чисел Бернулли, где искомое число умножено на половину от своего номера плюс один. Для четвёртой степени: пять вторых второго числа Бернулли равны половине, умноженной на шесть и на одну шестую в квадрате, то есть одной двенадцатой; и снова второе число равно одной тридцатой. Похожее соотношение получается из того, что производная тангенса равна единице плюс тангенс в квадрате.

Его второе улучшение смешивает обычный котангенс с его гиперболическим двойником — той же функцией, вычисленной от мнимого аргумента. При сложении двух рядов каждый второй член сокращается, так что выживают только нулевое, второе, четвёртое числа Бернулли и так далее, через одно; при вычитании остаются другие. С теоремой Муавра о степенях комплексных чисел каждое из этих полусемейств снова становится отношением двух простых рядов, а сравнение коэффициентов даёт уравнения, перескакивающие через одно число Бернулли. Вместо примерно половины прежних чисел каждому новому теперь нужна лишь примерно четверть номера членов: например, пять вместо десяти, когда номер равен двадцати. Похожие результаты получаются из тангенса вместе с гиперболическим тангенсом.

СТГ

B_0

B_2

B_4

B_6

B_8

B_{10}

СТН

+

-

+

-

+

-

СУММА

БЫЛО

СТАЛО

Двойник сокращает каждый второй член

Запомним

Числа Бернулли Рамануджана — это положительные дроби, стоящие в ряду для x , умноженного на котангенс x , причём нулевое принимается равным минус единице. Запись котангенса как отношения двух рядов и сравнение каждой степени x дают уравнения, которые выдают эти числа одно за другим: одна шестая, одна тридцатая, одна сорок вторая. Каждому из этих простых уравнений нужны все прежние числа, и это становится медленно. Возведение ряда в квадрат или смешивание котангенса с его гиперболическим двойником дают соотношения, которым нужно вдвое меньше прежних чисел.

Вопросы

1. Почему Рамануджан объявляет нулевое число Бернулли равным минус единице?
 - a. Потому что все его числа Бернулли отрицательны
 - b. Чтобы свободный член ряда, единица, вписался в ту же закономерность, что и остальные члены
 - c. Потому что котангенс нуля равен минус единице
 - d. Чтобы в уравнениях было меньше членов
2. Почему сравнение коэффициентов двух рядов даёт уравнение?

- a. Потому что два ряда могут быть равны, только когда при каждой степени x в обеих частях стоит один и тот же коэффициент
 - b. Потому что коэффициенты всегда целые
 - c. Потому что каждый ряд равен котангенсу
 - d. Потому что ряды синуса и косинуса одинаковы
3. В чём недостаток простых уравнений, полученных из трёх записей котангенса?
- a. После третьего числа они дают неверные значения
 - b. Каждому шагу нужны все прежние числа Бернулли, так что работа растёт
 - c. Они работают только для нечётных степеней
 - d. Для них нужен калькулятор
4. Чего достигает смешивание котангенса с его гиперболическим двойником?
- a. Каждый член удваивается
 - b. Каждый второй член сокращается, так что каждую половину семейства можно найти по меньшему числу прежних чисел
 - c. Числа Бернулли становятся вовсе не нужны
 - d. Ряд становится конечным

Ответы

1. b) При его счёте все они положительны, а чтобы свободный член, единица, вписался в ту же закономерность, он объявляет нулевое равным минус единице.

2. а) После умножения на знаменатель получаются два ряда, которые обязаны быть равны, а равны они, только когда при каждой степени x стоит один и тот же коэффициент.

3. б) Каждый шаг работает, но каждому шагу нужны и все прежние числа Бернулли, и Рамануджан говорит, что это становится утомительным.

4. б) При сложении каждый второй член сокращается, и получающимся уравнениям нужна лишь примерно четверть номера членов вместо половины.

Разобранные примеры

Первые два числа Бернулли через сравнение степеней S помощью чётного семейства уравнений и нулевого числа, равного минус единице, найдите первое и второе числа Бернулли.

Сравнение при четвёртой степени даёт: шесть раз первое число, минус нулевое, минус два, равно нулю.

Так как нулевое равно минус единице, это шесть раз первое, плюс один, минус два, равно нулю, значит, первое равно одной шестой.

Сравнение при шестой степени даёт: пятнадцать раз второе, минус пятнадцать раз первое, плюс нулевое, плюс три, равно нулю.

То есть пятнадцать раз второе, минус пятнадцать шестых, минус один, плюс три, равно нулю, значит, пятнадцать раз второе равно одной второй.

Ответ: Первое равно одной шестой, второе — одной тридцатой.

Задачи

1. Проверьте рецепт калькулятора: при первом числе Бернулли, равном одной шестой, какая доля x в квадрате появляется в ряду

для x , умноженного на котангенс x ?

Подсказка: Доля равна этому числу, делённому на два факториал и умноженному на два в квадрате.

Ответ: Одна третья: одна шестая, делённая на два и умноженная на четыре, — это четыре двенадцатых, то есть одна третья, и она вычитается.

2. С помощью соотношения для квадрата ряда при четвёртой степени восстановите второе число Бернулли по первому, равному одной шестой.

Подсказка: Пять вторых второго числа равны половине, умноженной на шесть и на квадрат первого числа.

Ответ: Одна тридцатая: половина, умноженная на шесть и на одну тридцать шестую, — это одна двенадцатая, а одна двенадцатая, делённая на пять вторых, — одна тридцатая.

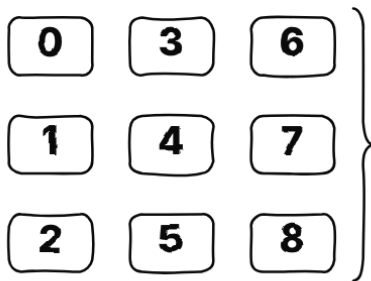
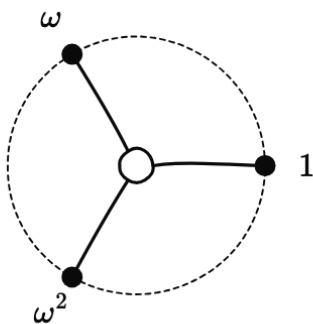
3. Когда номер равен двадцати, сколько прежних членов использует простое чётное уравнение и сколько — гиперболический короткий путь?

Подсказка: Простые уравнения используют примерно половину номера членов, короткий путь — примерно четверть.

Ответ: Примерно десять для простого уравнения и примерно пять для короткого пути, так что короткому пути нужно вдвое меньше прежних чисел.

Шаги по шесть

Представьте трёх друзей, которые тянут кольцо верёвками, натянутыми под равными углами, на треть оборота друг от друга. Если они тянут одинаково сильно, кольцо не сдвигается: три тяги в точности уравнивают друг друга. Следующий короткий путь Рамануджана использует три числа, расположенные как эти три верёвки, и работу ему экономит именно это взаимное погашение.



$$3 \times (-1) = -3$$

$$\text{first} = \frac{1}{6}$$

Три верёвки, три нити

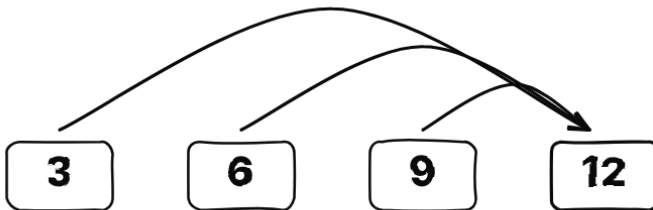
Эти числа — три кубических корня из единицы: сама единица и два комплексных числа, которые обычно называют омегой и омегой в квадрате; каждое отстоит от других на треть оборота по окружности. Каждое из них, умноженное само на себя трижды, даёт единицу, а все три в сумме дают ноль, как три верёвки. В прошлой части смешивание котангенса с его гиперболическим двойником гасило каждое второе число Бернулли; если подать в котангенс все три кубических корня, гаснут два члена из каждых трёх.

Он начинает с тождества для синусов: четыре синуса x , умноженные на синус x омега и на синус x омега в квадрате, равны минус сумме синусов удвоенных этих трёх углов. Логарифмирование и дифференцирование превращают это произведение в сумму трёх котангенсов, каждый со своим кубическим корнем в качестве веса. Уменьшив угол вдвое и пройдя те же шаги, что и раньше, он получает три новых равенства, и каждое говорит, что короткий ряд из чисел Бернулли равен отношению двух простых рядов. Первое сохраняет только нулевое, третье, шестое числа Бернулли — каждое третье. Второе сохраняет первое, четвёртое, седьмое; третье — второе, пятое, восьмое. Так всё семейство расщепляется на три переплетённые нити, через три места друг от друга, и каждую нить можно разбирать отдельно.

Первые члены можно проверить напрямую. В первом равенстве при очень малом x правая часть равна минус x , умноженному на x в квадрате пополам и делённому на x в кубе на шесть, то есть минус трём; левая часть начинается с утроенного нулевого числа Бернулли, а трижды минус один — это минус три. Во втором правая часть начинается с x в квадрате на четыре, а левая — с

утроенного первого числа Бернулли, делённого пополам и умноженного на x в квадрате; это снова даёт одну шестую.

Сравнение коэффициентов в трёх равенствах даёт его двенадцатый результат: короткую знакопеременную сумму чисел Бернулли, отстоящих друг от друга на шесть, с числами-счётчиками впереди, которую замыкает последний член — шестая или третья часть номера. Для номера пять она короче некуда: десять первых чисел Бернулли равны пяти третьим, так что первое равно одной шестой. В общем случае каждому новому числу теперь нужна лишь треть членов, которые требовались простому способу: двенадцатое получается только из девятого, шестого и третьего.



ТРЕТЬ РАБОТЫ

$$10 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{1}{3}(n+2) B_n = \sum \text{pairs}$$

$$\frac{10}{3} B_8 = 28 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{42} = \frac{1}{9}$$

По шесть мест за раз

Затем следует второй подарок — способ проверить работу. Разделив второе равенство на x и продифференцировав, а затем воспользовавшись первым и вторым равенствами вместе, он находит соотношение, в котором ряд второй нити, с дополнительными множителями, равен x в квадрате плюс девять, умноженное на произведение первых двух рядов. Сравнение коэффициентов даёт его тринадцатый результат: треть от номера плюс два, умноженная на число Бернулли, равна сумме произведений пар, снова отстоящих на шесть. Попробуйте для номера восемь: треть от десяти, умноженная на четвёртое число Бернулли, должна равняться двадцати восьми, умноженным на одну шестую и на одну сорок вторую, то есть одной девятой; значит, четвёртое равно одной девятой, умноженной на три десятых, — одной тридцатой, как и прежде. Рамануджан прямо говорит, для чего каждый из них: двенадцатый результат вычисляет числа очень быстро, а тринадцатый полезен для проверки вычислений — так бухгалтер складывает столбец дважды разными путями.

Запомним

Три кубических корня из единицы в сумме дают ноль, и если подать их в котангенс, гаснут два члена с числами Бернулли из каждых трёх. Это расщепляет числа Бернулли на три нити с шагом шесть, и каждая задаётся отношением простых рядов, первые члены которых сразу проверяют известные значения. Сравнение коэффициентов даёт быструю рекуррентную формулу, которой нужна лишь треть прежних членов простого способа, и соотношение с произведениями, служащее независимой проверкой.

Вопросы

1. Почему три кубических корня из единицы гасят два члена из каждых трёх?
 - a. Потому что в сумме они дают ноль, как три равные тяги на кольцо
 - b. Потому что каждый из них равен единице
 - c. Потому что все они отрицательны
 - d. Потому что они обращают котангенс в ноль
2. Для чего хорош двенадцатый результат и для чего — тринадцатый?
 - a. Двенадцатый проверяет работу, тринадцатый вычисляет числа

- b. Двенадцатый вычисляет числа очень быстро,
тринадцатый полезен для проверки
 - c. Оба доказывают, что числа — дроби
 - d. Оба дают знаменатели
3. Сколько прежних членов нужно новой рекуррентной формуле по сравнению с простым способом?
- a. Столько же
 - b. Лишь треть
 - c. Вдвое больше
 - d. Ни одного

Ответы

1. a) Каждый, умноженный сам на себя трижды, даёт единицу, а все три в сумме дают ноль, так что тройная смесь гасит два члена из каждых трёх.
2. b) Рамануджан говорит, что двенадцатый результат вычисляет числа очень быстро, а тринадцатый полезен для проверки вычислений.
3. b) Каждому новому числу теперь нужна лишь треть членов, которые требовались простому способу.

Разобранные примеры

Проверка соотношением с произведениями S помощью тринадцатого результата для номера восемь, при первом числе Бернулли, равном одной шестой, и третьем, равном одной сорок второй, найдите четвёртое.

Для номера восемь появляется лишь одно произведение: двадцать восемь, умноженное на первое число и на третье.

Двадцать восемь, умноженное на одну шестую и на одну сорок вторую, — это двадцать восемь двести пятьдесят вторых, то есть одна девятая.

Левая часть — треть от десяти, то есть десять третьих, умноженная на четвёртое число.

Значит, четвёртое число равно одной девятой, делённой на десять третьих, то есть трём девяностым — одной тридцатой.

Ответ: Четвёртое число Бернулли равно одной тридцатой.

Задачи

1. Почему из первого равенства с кубическими корнями следует, что нулевое число Бернулли равно минус единице?

Подсказка: При очень малом x правая часть равна минус x , умноженному на x в квадрате пополам и делённому на x в кубе на шесть.

Ответ: Это отношение равно минус трём, а левая часть начинается с утроенного нулевого числа, так что нулевое число равно минус единице.

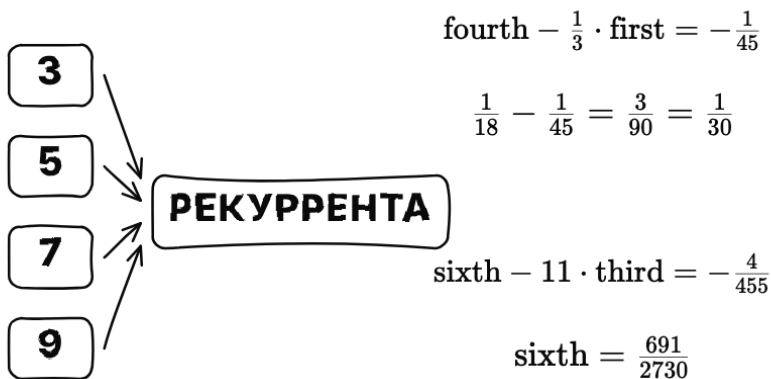
2. С помощью двенадцатого результата для номера пять найдите первое число Бернулли.

Подсказка: Для номера пять он читается так: десять первых чисел равны пяти третьим.

Ответ: Одна шестая, потому что пять третьих, делённые на десять, — это одна шестая.

Двадцать дробей и закономерности в них

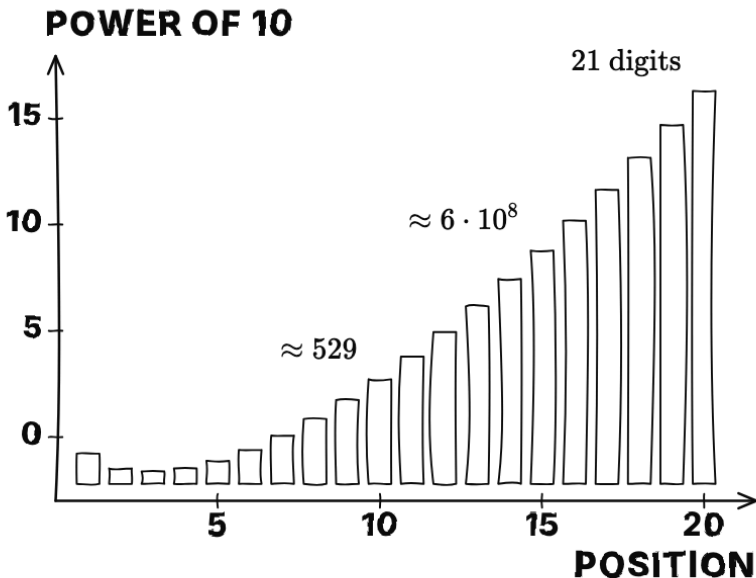
Натуралисту, который хочет найти законы перелёта птиц, сначала нужно записать множество наблюдений. Рамануджан работает так же: прежде чем формулировать какой-либо закон о числах Бернулли, он собирает образцы. Он говорит об этом прямо: чтобы узнать их свойства, удобно сначала вычислить несколько из них.



Образцы из рекуррентной формулы

Его инструмент — быстрая рекуррентная формула из прошлой части. Он подаёт в неё нечётные числа три, пять, семь, девять и так далее, одно за другим, и каждое даёт короткое уравнение. Например, одно из них говорит, что четвёртое число Бернулли минус треть первого равно минус одной сорок пятой. Первое равно одной шестой, треть от него — одна восемнадцатая, а одна восемнадцатая минус одна сорок пятая — это три девяностых, то есть одна тридцатая. Другое говорит, что шестое минус одиннадцать третьих равно минус четырём на четыреста пятьдесят пять; при третьем, равном одной сорок второй, шестое выходит равным шестистам девяноста одному на две тысячи семьсот тридцать.

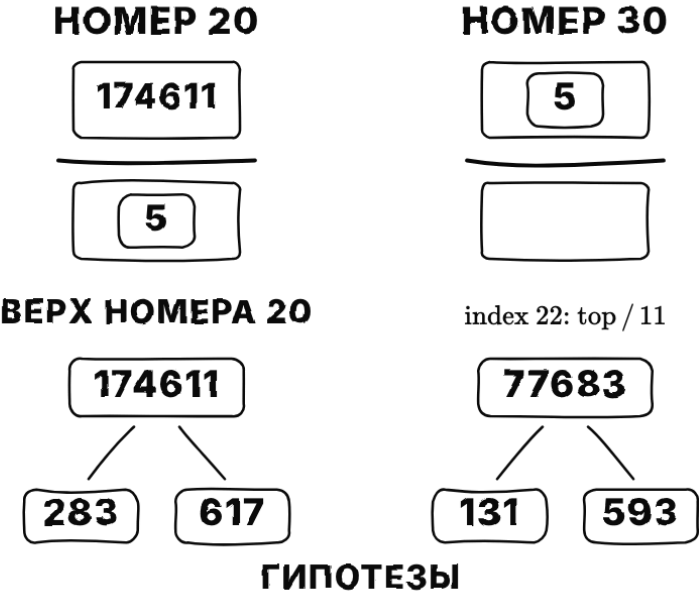
Продолжая так, он выписывает двадцать чисел Бернулли. Какое-то время они остаются маленькими — одна шестая, одна тридцатая, одна сорок вторая, снова одна тридцатая, пять шестьдесят шестых, — а потом быстро растут. Десятое — около пятисот двадцати девяти, пятнадцатое — около шестисот миллионов, а у двадцатого числитель из двадцати одной цифры при знаменателе всего тринадцать тысяч пятьсот тридцать. Знаменатели остаются скромными, а числители взрываются, и он отмечает, что последовательность растёт без границ.



Двадцать образцов

Затем он смотрит на образцы и формулирует, что наблюдает, для каждого числа Бернулли с чётным номером, отличным от нуля. Первое: если разделить число на его номер и сократить, числитель окажется простым числом. Второе: знаменатель всегда содержит двойку и тройку, каждую ровно один раз. Третье: если умножить число на двойку в степени номера и на единицу меньше этой степени двойки, а затем разделить на номер, получится целое число; значит, удвоенное «на единицу меньше этой степени двойки», умноженное на число, — нечётное целое число. Из этого он выводит два следствия: одно о том, какая степень двойки остаётся в знаменателе, и другое о том, что простое число, делящее номер, но отсутствующее в знаменателе, должно делить числитель, причём частное простое.

Его примеры делают последнюю мысль наглядной. Одиннадцать делит номер двадцать два, но его нет в знаменателе этого числа, ста тридцати восьми, так что одиннадцать делит числитель; то же происходит с тринадцатью для номера двадцать шесть, с семнадцатью для тридцати четырёх и с девятнадцатью для тридцати восьми. Пять делит и двадцать, и тридцать; для двадцати оно стоит в знаменателе, а для тридцати — нет, поэтому для тридцати оно появляется в числителе. Его словами: простое число, входящее в номер и не найденное в знаменателе, появится в числителе, и наоборот.



Куда уходит пятёрка — и две ошибки

Это наблюдения, и не все они выдерживают проверку. Числитель для номера двадцать, сто семьдесят четыре тысячи шестьсот

одиннадцать, который он называет простым, равен двумстам восьмидесяти трём, умноженным на шестьсот семнадцать. Частное для номера двадцать два, семьдесят семь тысяч шестьсот восемьдесят три, равно ста тридцати одному, умноженному на пятьсот девяносто три. Редакторы собрания его статей отмечают, что первые два из этих утверждений, как и правило для знаменателей из следующего параграфа, были высказаны лишь как гипотезы; утверждение о двойке и тройке в каждом знаменателе при этом верно.

Запомним

Чтобы найти свойства чисел Бернулли, Рамануджан сначала вычисляет двадцать из них своей быстрой рекуррентной формулой — от одной шестой до числа с двадцатиоднозначным числителем. По этой таблице он считывает закономерности: простой числитель после деления на номер, двойка и тройка ровно по разу в каждом знаменателе и некоторые кратные, которые всегда оказываются нечётными целыми числами. Он связывает простые числа из номера с числителем и знаменателем: простой делитель номера появляется в одном из двух. Некоторые из этих закономерностей — верные теоремы, но утверждение о простом числителе ложно, например для номера двадцать, чей числитель равен двумстам восьмидесяти трём, умноженным на шестьсот семнадцать.

Вопросы

1. Почему Рамануджан вычисляет двадцать чисел Бернулли, прежде чем формулировать какие-либо свойства?
 - a. Потому что, как натуралисту, ему нужны образцы, прежде чем искать законы
 - b. Потому что журнал требовал таблицу
 - c. Потому что свойства можно доказать лишь для двадцати из них
 - d. Потому что он хотел показать, что рекуррентная формула не работает
2. Что Рамануджан замечает о знаменателях чисел Бернулли с чётным номером?
 - a. Они всегда простые
 - b. Они всегда содержат двойку и тройку, каждую ровно один раз
 - c. Они растут так же быстро, как числители
 - d. Они всегда степени двойки
3. Какое наблюдение не выдерживает проверки, как показывает пример номера двадцать?
 - a. Что двойка и тройка делят каждый знаменатель
 - b. Что числитель после деления на номер — простое число
 - c. Что числа растут без границ
 - d. Что для номера двадцать пятёрка стоит в знаменателе

Ответы

1. а) Он говорит, что для знания их свойств удобно сначала вычислить несколько из них, — собрать образцы, прежде чем формулировать законы.
2. б) Его второе наблюдение: знаменатель всегда содержит двойку и тройку, каждую ровно один раз.
3. б) Числитель для номера двадцать, сто семьдесят четыре тысячи шестьсот одиннадцать, равен двумстам восьмидесяти трём, умноженным на шестьсот семнадцать, так что он не простой.

Разобранные примеры

Значение из рекуррентной формулы Одно из уравнений рекуррентной формулы говорит, что четвёртое число Бернулли минус треть первого равно минус одной сорок пятой. При первом, равном одной шестой, найдите четвёртое.

Треть от одной шестой — одна восемнадцатая.

Значит, четвёртое равно одной восемнадцатой минус одна сорок пятая.

В девяностых это пять девяностых минус две девяностых, то есть три девяностых.

Три девяностых — это одна тридцатая.

Ответ: Одна тридцатая

Задачи

1. Проверьте утверждение о простом числителе для номера двадцать: даёт ли числитель произведение двухсот восьмидесяти трёх на шестьсот семнадцать?

Подсказка: Умножьте двести восемьдесят три на шестьсот, затем на семнадцать и сложите.

Ответ: Да: двести восемьдесят три на шестьсот — сто шестьдесят девять тысяч восемьсот, а двести восемьдесят три на семнадцать — четыре тысячи восемьсот одиннадцать; вместе сто семьдесят четыре тысячи шестьсот одиннадцать, так что числитель не простой.

2. Что своими словами говорит правило Рамануджана о простом числе, делящем номер?

Подсказка: Вспомните примеры с одиннадцатью для номера двадцать два и с пятёркой для номера тридцать.

Ответ: Такое простое число появляется либо в знаменателе, либо в числителе этого числа Бернулли. Если его нет в знаменателе, как одиннадцати для номера двадцать два, оно должно делить числитель, и наоборот.

Рецепт для знаменателей

Вот игра, в которую можно сыграть с карандашом. Возьмите число двадцать четыре и выпишите всё, что его делит: один, два, три, четыре, шесть, восемь, двенадцать, двадцать четыре.

Прибавьте к каждому единицу: два, три, четыре, пять, семь, девять, тринадцать, двадцать пять. Вычеркните все не простые числа и перемножьте оставшиеся: два на три на пять на семь на тринадцать — две тысячи семьсот тридцать. А теперь загляните в таблицу Рамануджана: у числа Бернулли с номером двадцать четыре ровно такой знаменатель.

ДЕЛИТЕЛИ 24

	1	2	3	4	6	8	12	24
+1 ↓	2	3	~~4~~	5	7	~~9~~	13	~~25~~

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 2730$$

$$B_{24} = \frac{236364091}{2730}$$

$$20 : 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 330 \quad 30 : 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31 = 14322$$

Это и есть его правило для знаменателей. Он заметил, что все знаменатели делятся на шесть, у номеров, кратных четырём, — на пять, у кратных шести — на семь, у кратных десяти — на одиннадцать, и вывел общий рецепт: знаменатель есть произведение простых чисел, на единицу больших какого-либо делителя номера, считая единицу и сам номер. Нечётные делители, кроме единицы, можно пропускать: число на единицу больше нечётного чётно, а значит, не простое. Для номера двадцать рецепт даёт два, три, пять и одиннадцать, а их произведение — триста тридцать, знаменатель из таблицы; для номера тридцать он даёт два, три, семь, одиннадцать и тридцать один, а их произведение — четырнадцать тысяч триста двадцать два.

Затем он смотрит на дробные части — то, что остаётся после отбрасывания целой части. Он раскладывает каждую на простые кусочки и находит правило: дробная часть равна сумме единиц, делённых на каждое простое из знаменателя, минус единица, причём всё выражение берётся со знаком плюс или минус, чередующимся вместе с номером. Для номера шестнадцать простые — это два, три, пять и семнадцать; половина плюс треть плюс пятая плюс семнадцатая минус единица — это сорок семь на пятьсот десять. И число Бернулли с номером шестнадцать, три тысячи шестьсот семнадцать на пятьсот десять, — это ровно семь плюс сорок семь на пятьсот десять. Для номера двадцать два знаки переворачиваются: единица минус половина минус треть минус двадцать третья — это семнадцать на сто тридцать восемь.

ДРОБНАЯ ЧАСТЬ

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17} - 1 = \frac{47}{510}$$

$$\frac{3617}{510} = 7 + \frac{47}{510}$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{23} = \frac{17}{138}$$

Остаток после целой части

Отсюда он выводит следствие о парах: если у двух чисел Бернулли один и тот же знаменатель, то их разность — или сумма, когда того требуют знаки, — целое число. У номеров двенадцать и двадцать четыре общий знаменатель две тысячи семьсот тридцать, так что разность этих двух чисел — целое число; то же верно для шестнадцати и тридцати двух. У номеров десять и двадцать знаменатели различаются лишь пятёркой, и знаменатель их суммы равен ровно пяти.

Он добавляет ещё два наблюдения об остатках. Когда номер кратен четырём, у числа минус одна тридцатая числитель делится на двадцать: для номера двенадцать шестьсот девяносто один на две тысячи семьсот тридцать минус одна тридцатая —

это двадцать на девяносто один, и числитель действительно двадцать. Когда номер не кратен четырём, у числа, делённого на номер, минус одна двенадцатая числитель делится на пять: для номера десять это даёт минус пять на шестьдесят шесть. Наконец, некоторые целые числа, построенные из этих чисел Бернулли и степеней двойки, всегда дают в остатке единицу при делении на тридцать; для номера два первое из них — просто единица, то есть тридцать, умноженное на ноль, плюс один.

Запомним

Правило Рамануджана для знаменателей: возьмите каждый делитель номера, прибавьте единицу, оставьте простые и перемножьте; для двадцати четырёх это даёт две тысячи семьсот тридцать. Дробная часть каждого числа Бернулли равна сумме единиц, делённых на каждое простое из его знаменателя, минус единица, с чередующимся знаком; для номера шестнадцать это сорок семь на пятьсот десять. Поэтому два числа Бернулли с одинаковым знаменателем различаются на целое число, а дальнейшие правила ограничивают их числители делимостью на двадцать или на пять и остатком единица при делении на тридцать.

Вопросы

1. Как правило Рамануджана для знаменателей находит знаменатель по данному номеру?

- a. Взять делители номера, к каждому прибавить единицу, оставить простые и перемножить
 - b. Перемножить все простые числа меньше номера
 - c. Прибавить к номеру единицу и возвести в квадрат
 - d. Взять наибольший простой делитель номера
2. Что даёт правило дробных частей для номера шестнадцать?
- a. Одну семнадцатую
 - b. Сорок семь на пятьсот десять
 - c. Семь
 - d. Семнадцать на сто тридцать восемь
3. Почему разность чисел Бернулли с номерами двенадцать и двадцать четыре — целое число?
- a. Потому что оба — целые числа
 - b. Потому что у них один знаменатель, так что их дробные части сокращаются
 - c. Потому что двадцать четыре вдвое больше двенадцати
 - d. Потому что оба числителя простые

Ответы

1. **a)** Знаменатель есть произведение простых чисел, на единицу больших какого-либо делителя номера, считая единицу и сам номер.
2. **b)** Половина плюс треть плюс пятая плюс семнадцатая минус единица — это сорок семь на пятьсот десять.
3. **b)** Если у двух чисел Бернулли один знаменатель, их разность — или сумма, когда того требуют знаки, — целое число; у двенадцати и двадцати четырёх общий знаменатель две тысячи семьсот тридцать.

Разобранные примеры

Знаменатель для номера двадцать С помощью правила для знаменателей найдите знаменатель числа Бернулли с номером двадцать.

Делители двадцати — один, два, четыре, пять, десять и двадцать.

Нечётные делители, кроме единицы, можно пропустить, так что берём один, два, четыре, десять и двадцать.

Прибавив единицу, получаем два, три, пять, одиннадцать и двадцать один.

Двадцать один не простое, поэтому оставляем два, три, пять и одиннадцать и перемножаем: триста тридцать.

Ответ: Триста тридцать

Задачи

1. Проверьте правило о числителях, делящихся на двадцать, для номера двенадцать: чему равно шестьсот девяносто один на две тысячи семьсот тридцать минус одна тридцатая?

Подсказка: Одна тридцатая — это девяносто один на две тысячи семьсот тридцать.

Ответ: Шестьсот на две тысячи семьсот тридцать, что сокращается до двадцати на девяносто один, а двадцать делится на двадцать.

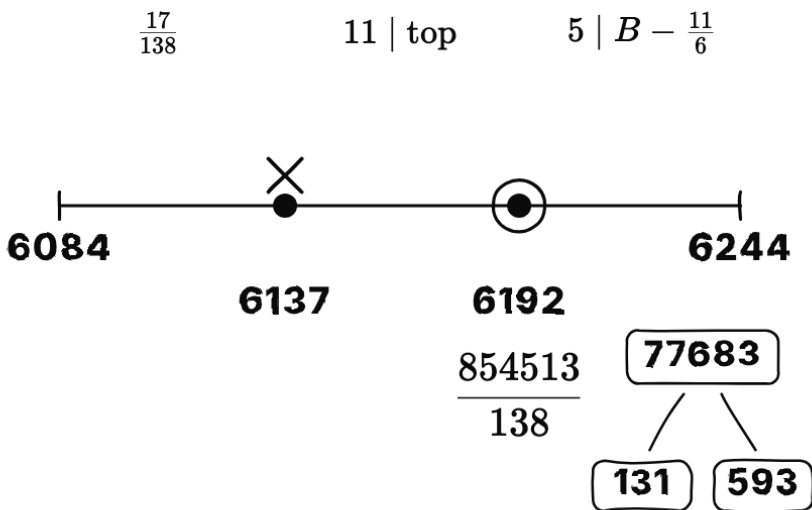
2. Примените правило дробных частей для номера двадцать два: единица минус половина минус треть минус двадцать третья.

Подсказка: Приведите всё к знаменателю сто тридцать восемь.

Ответ: Сто тридцать восемь минус шестьдесят девять минус сорок шесть минус шесть, всё на сто тридцать восемь, — это семнадцать на сто тридцать восемь.

Определяем число по его величине

Представьте игру в угадайку: кто-то загадал число между шестью тысячами с чем-то и шестью тысячами двумястами с чем-то и даёт вам три подсказки о его цифрах. С правильными подсказками сто шестьдесят возможностей сжимаются до двух. Рамануджан играет ровно в эту игру с числом Бернулли, а затем показывает, откуда берётся грубая величина.



Три подсказки, два подозреваемых

Его пример — число Бернулли с номером двадцать два, и он предполагает, что мы знаем лишь, что оно лежит между шестью

тысячами восьмьюдесятью четырьмя и шестью тысячами двумястами сорока четырьмя. Первая подсказка — дробная часть, которую правило из прошлой части определяет как семнадцать на сто тридцать восемь. Вторая: одиннадцать делит номер, а в знаменателе одиннадцати нет, значит, оно должно делить числитель. Третья — правило остатков: у этого числа минус одиннадцать шестых числитель должен делиться на пять. Все три проверки проходят лишь два кандидата: шесть тысяч сто тридцать семь целых и семнадцать сто тридцать восьмых и шесть тысяч сто девяносто две целых с той же дробью.

Чтобы выбрать между ними, Рамануджан пользуется своей догадкой, что числитель, делённый на одиннадцать, — простое число. Числитель первого кандидата делится ещё и на семь и семнадцать, поэтому он его отвергает и оставляет второго — восемьсот пятьдесят четыре тысячи пятьсот тринадцать на сто тридцать восемь. Это верное значение, как показывает его собственная таблица, но последний шаг несостоятелен: этот числитель, делённый на одиннадцать, равен ста тридцати одному, умноженному на пятьсот девяносто три, — тоже не простое. Метод подсказок хорош; подсказка о простом частном — слабое звено.

Откуда берутся такие грубые пределы? Параграф одиннадцатый приводит классическую формулу: число Бернулли равно двум, умноженным на факториал его номера, делённым на два пи в степени номера и умноженным на сумму единиц, делённых на каждое целое число в степени номера. При больших номерах эта сумма едва превышает единицу, так что величиной управляет факториал против степени двух пи. Для номера два сумма единиц, делённых на квадраты, равна пи в квадрате на шесть —

знаменитый результат, и формула даёт два на два, делённое на четыре пи квадрат и умноженное на пи квадрат на шесть, то есть ровно одну шестую. Ту же сумму можно записать как произведение по всем простым числам, а формулу — и как интеграл, который Рамануджан выводит, раскладывая дробь в геометрическую прогрессию.

$$B_n = \frac{2^n n!}{(2\pi)^n} \left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots\right)$$

$$\frac{2 \cdot 2}{4\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{6}$$

$$1 + \frac{1}{2^n} + \dots = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-n}}$$

$$\log 10! \approx 15.10441$$

$$\log 3628800 = 15.10441$$

НУЖНО БОЛЬШЕ ЗНАКОВ

Величина через факториал

Логарифмируя, он использует известное разложение логарифма факториала, члены которого после первых нескольких сами построены из чисел Бернулли, а остаток всегда составляет долю следующего члена. Для десяти факториал его первые члены дают пятнадцать целых десять тысяч четыреста сорок одну стотысячную, и истинный логарифм трёх миллионов шестисот

двадцати восьми тысяч восьмисот совпадает во всех показанных знаках. Значит, целую часть числа Бернулли можно оценить по его величине, а дробная часть получается из правила простых; вместе они дают точное значение. Подвох, признаёт Рамануджан, в том, что при больших номерах для этого нужны логарифмы с большим числом знаков, чем есть в любой таблице, и он обещает обходной путь позже.

Запомним

Грубые пределы плюс три арифметические подсказки — дробная часть, делимость на простое из номера и правило остатков — сужают число Бернулли с номером двадцать два до двух кандидатов. Окончательный выбор Рамануджана опирается на его догадку о простом частном, которая здесь ложна, хотя выбранное им значение верно. Классическая формула даёт величину каждого числа Бернулли через факториал, степень двух пи и сумму чуть больше единицы, а через логарифм факториала — его целую часть, если есть очень точные логарифмы.

Вопросы

1. Какие три подсказки сужают число Бернулли с номером двадцать два до двух кандидатов?
 - а. Его дробная часть, делимость его числителя на одиннадцать и правило остатков с одиннадцатью

шестыми и пятёркой

- b. Его первая цифра, последняя цифра и длина
 - c. Значение π , факториал и логарифм
 - d. Его знаменатель, квадрат и квадратный корень
2. Почему последний шаг выбора Рамануджана несостоятелен, хотя значение верное?
- a. Потому что выбранный числитель, делённый на одиннадцать, тоже не простой
 - b. Потому что пределы были неверны
 - c. Потому что дробная часть другая
 - d. Потому что семь не делит первого кандидата
3. Что, согласно классической формуле, главным образом определяет величину числа Бернулли?
- a. Факториал его номера против степени двух π
 - b. Количество простых чисел меньше его номера
 - c. Его знаменатель
 - d. Котангенс его номера

Ответы

1. a) Дробная часть определена как семнадцать на сто тридцать восемь, одиннадцать должно делить числитель, а у числа минус одиннадцать шестых числитель должен делиться на пять.
2. a) Он опирается на то, что числитель, делённый на одиннадцать, прост, но для выбранного значения он равен ста тридцати одному, умноженному на пятьсот девяносто три.
3. a) При больших номерах сумма в формуле едва превышает единицу, так что величиной управляет факториал против степени двух π .

Разобранные примеры

Одна шестая из формулы величины e помощью классической формулы для номера два, при сумме единиц, делённых на квадраты, равной e в квадрате на шесть, найдите первое число Бернулли.

Два, умноженное на факториал двух, — это четыре.

Два e во второй степени — это четыре e в квадрате, так что множитель равен четырём на четыре e в квадрате, то есть единице на e в квадрате.

Умножение единицы на e в квадрате на e в квадрате на шесть даёт одну шестую.

Ответ: Одна шестая

Задачи

1. Почему грубые пределы для числа Бернулли могут привести к его точному значению?

Подсказка: Подумайте, что уже сообщает правило дробных частей.

Ответ: Дробная часть точно известна по простым числам знаменателя, так что неизвестна лишь целая часть. Грубые пределы оставляют диапазон целых чисел, арифметические правила о числителе отсекают все, кроме нескольких, а ещё один факт выбирает нужное.

2. Десять факториал — это три миллиона шестьсот двадцать восемь тысяч восемьсот. Почему проверка его логарифма — хорошее испытание разложения, которым пользуется Рамануджан?

Подсказка: Сравните первые члены разложения с истинным значением.

Ответ: Истинный натуральный логарифм — около пятнадцати целых десяти тысяч четырёхсот сорока одной стотысячной, и уже первые несколько членов разложения дают те же цифры, а это показывает, как точно разложение оценивает величины; то же разложение, применённое к формуле величины, оценивает целую часть числа Бернулли.

Путь к доказательству — с одним разрывом

Попробуйте сложить единицу на одиннадцать в квадрате, единицу на двенадцать в квадрате, единицу на тринадцать в квадрате и так далее до бесконечности. Ответ — около нуля запятая ноль, девять, пять, один, шесть, шесть. Есть короткий путь, который получает почти все эти цифры из трёх членов: одна десятая, минус единица на двести, плюс одна шестая, делённая на тысячу. Одна шестая в этом коротком пути — первое число Бернулли, а параграф двенадцатый о том, как такие короткие пути могли бы доказать замеченные Рамануджаном закономерности.

$$\frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{13^2} + \dots$$

$$\approx 0.0951663$$

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{200} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{first Bernoulli}} \cdot \frac{1}{1000} = 0.0951667$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{B_2}{n^3} - \frac{B_4}{n^5} + \dots$$

$$\text{left out} \approx 3 \cdot 10^{-7}$$

Короткий путь из трёх членов

Короткий путь происходит из логарифма факториала, разложение которого мы встретили в прошлой части. Двукратное дифференцирование даёт хвост суммы обратных квадратов, начинающийся сразу после числа n , в виде ряда по степеням единицы на n : единица на n , минус единица на удвоенное n в квадрате, плюс первое число Бернулли на n в кубе, минус второе на n в пятой, и так далее. Если брать этот ряд целиком, он не сходится, поэтому Рамануджан останавливается после некоторого члена и контролирует остаток. Остаток всегда составляет долю — от нуля до целого — первого отброшенного члена, и он подкрепляет это интегральной формулой для остатка. Для n , равного десяти, первый отброшенный член —

около трёх десятиллионных, поэтому три члена уже дали шесть верных знаков.

Теперь главная мысль. Он записывает длинное сочетание: тот же хвост, пару простых членов и сумму по простым числам, по одному члену на каждое простое больше трёх. Он утверждает, что всё это сочетание можно переписать как ряд по степеням единицы на x , все коэффициенты которого — целые числа, начиная с единицы на x в пятнадцатой, минус семь на x в семнадцатой и так далее. Если это утверждение верно, сравнение коэффициентов заставляет некоторые сочетания быть целыми числами: первое число Бернулли минус одна шестая; минус второе, минус одна шестая, плюс одна пятая; и так далее, каждое — с единицей, делённой на каждое простое, относящееся к этому числу Бернулли.

СОЧЕТАНИЕ

$$\longrightarrow \frac{1}{x^{15}} - \frac{7}{x^{17}} + \dots$$

ЦЕЛЫЕ?

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$$

$$-\frac{1}{30} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = 0$$

$$\frac{7}{6} - \frac{1}{6} = 1$$

$$-\frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1$$

Утверждение и первые проверки

Проверьте их по известным значениям. Одна шестая минус одна шестая — ничто. Минус одна тридцатая, минус одна шестая, плюс одна пятая — это минус одна тридцатая, минус пять тридцатых, плюс шесть тридцатых, то есть снова ничто. Для седьмого числа Бернулли, семи шестых, минус одна шестая результат — единица, ровно первый коэффициент, который он написал с другой стороны. Если записать минус одну шестую как половину плюс треть минус единица, это превращается в правило для дробных частей из прежних параграфов, а из него следует правило об одинаковых знаменателях.

Затем он повторяет приём дважды. Взяв тот же хвост со знакопеременными знаками, он получает ряд, коэффициенты

которого — числа Бернулли, умноженные на единицу меньше степени двойки; если бы у удвоенного знакопеременного хвоста были целые коэффициенты, следовала бы вторая половина его утверждения о нечётности. Из первой производной логарифма факториала, в которую входят гармоническая сумма и постоянная Эйлера, он получает ещё один знакопеременный ряд; целые коэффициенты там дали бы первую половину утверждения о нечётности.



Три пути, один недостающий мост

Каждый путь кончается одними и теми же словами: если мы сможем доказать. Утверждений о целых коэффициентах он так и не доказывает, и редакторы собрания статей на это указывают, добавляя, что в некоторых шагах используются ряды, которые не

сходятся. Так что параграф двенадцатый — это тщательная карта того, как можно было бы доказать закономерности, но сам мост на ней ещё не построен; закономерности, к которым он ведёт, верны, и другие доказали их раньше.

Запомним

У хвоста суммы обратных квадратов есть ряд-короткий путь с коэффициентами Бернулли, и при его обрыве остаётся ошибка меньше первого отброшенного члена. Рамануджан сводит правило дробных частей и утверждения о нечётности к утверждению, что некоторые ряды имеют целые коэффициенты, и первые несколько коэффициентов действительно выходят целыми. Это утверждение он так и не доказывает, так что этот параграф — путь к доказательствам, а не доказательство.

Вопросы

1. Почему Рамануджан может остановить ряд для хвоста после нескольких членов?
 - a. Потому что остаток всегда составляет долю первого отброшенного им члена
 - b. Потому что оставшиеся члены все равны нулю
 - c. Потому что ряд сходится после трёх членов
 - d. Потому что хвост ровно равен одной десятой

2. На каком утверждении держится весь путь к доказательству?
- a. Что сочетание сумм по обратным квадратам и простым числам имеет целые коэффициенты
 - b. Что каждое число Бернулли простое
 - c. Что π — дробь
 - d. Что факториал растёт медленно
3. Что происходит с коэффициентом для седьмого числа Бернулли, семи шестых?
- a. Семь шестых минус одна шестая дают единицу, совпадая с первым коэффициентом с другой стороны
 - b. Получается ноль
 - c. Получается дробь
 - d. Его нельзя вычислить

Ответы

1. a) Остаток всегда составляет долю — от нуля до целого — первого отброшенного им члена.
2. a) Он утверждает, что всё сочетание можно переписать как ряд по степеням единицы на x , все коэффициенты которого — целые числа.
3. a) Семь шестых минус одна шестая — это единица, ровно первый коэффициент, который он написал с другой стороны.

Разобранные примеры

Исчезающий коэффициент Проверьте, что минус второе число Бернулли, минус одна шестая, плюс одна пятая — целое число, если второе число Бернулли равно одной тридцатой.

Запишем всё в тридцатых: минус одна тридцатая, минус пять тридцатых, плюс шесть тридцатых.

Сложим: минус один, минус пять, плюс шесть — это ничто.

Значит, коэффициент равен нулю — целому числу.

Ответ: Ноль

Задачи

1. Проверьте, что третье число Бернулли, одна сорок вторая, минус одна шестая, плюс одна седьмая — целое число.

Подсказка: Запишите всё в сорок вторых.

Ответ: Одна сорок вторая, минус семь сорок вторых, плюс шесть сорок вторых — это ничто, целое число.

2. Чем, своими словами, путь к доказательству отличается от доказательства?

Подсказка: Подумайте о словах «если мы сможем доказать».

Ответ: Путь показывает, что результат следовал бы из какого-то другого утверждения; доказательство устанавливает и это утверждение. Рамануджан показывает, что его закономерности следовали бы из целочисленности коэффициентов, но её не доказывает, так что его рассуждение закономерностей ещё не доказывает.

Описываем великана, не выписывая его

Сколько цифр у двойки в сотой степени? Умножать не нужно: логарифм двух — около нуля целых трёх десятых, так что сто двоек дают около тридцати целых одной десятой, а значит, тридцать одну цифру. Логарифмы измеряют величину без вычислений, и Рамануджан с их помощью описывает числа Бернулли далеко за пределами своей таблицы.

2^{100} has how many digits?

$$100 \times 0.301 = 30.1 \Rightarrow 31 \text{ digits}$$

ВЕЛИЧИНА БЕЗ СЧЁТА

$$\log_{10} B_n \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \log_{10} n - 1.23247 n + 0.7$$

$$\text{true value} \approx \dots + \frac{0.036}{n}$$

$$n = 20 : 20.5 \times 1.301 - 24.65 + 0.7 \approx 2.722$$

$$2.722 + 0.002 \approx 2.724 = \log_{10} 529.12$$

Цифры из логарифмов

Его формула для цифр говорит: десятичный логарифм числа Бернулли примерно равен номеру плюс одна вторая, умноженному на логарифм номера, минус одна целая двадцать три тысячи двести сорок семь сотых, умноженная на номер, плюс ноль целых семь десятых. Он получает её из классического моста прошлой части, логарифмируя и оставляя старшие члены факториала, и отмечает, что истинное значение чуть больше — примерно на три сотых, делённые на номер. Попробуйте для номера двадцать: двадцать с половиной, умноженные на одну целую три десятых, минус около двадцати четырёх целых шестидесяти пяти сотых, плюс ноль целых семь десятых, дают около двух целых семисот двадцати двух тысячных, а с малой поправкой — две целых семьсот двадцать четыре тысячных, то есть число около пятисот двадцати девяти; десятое значение таблицы действительно около пятисот двадцати девяти.

Затем он сравнивает соседей. Если разделить формулу моста для одного номера на ту же формулу двумя местами раньше, почти всё сокращается, и отношение двух чисел Бернулли равно номеру, умноженному на номер минус один и делённому на четыре пи в квадрате, с поправочными множителями, чрезвычайно близкими к единице. Так что каждое число Бернулли очень близко к предыдущему, умноженному на эту простую величину, и с ростом номера приближение быстро улучшается. Для номера шестнадцать множитель равен двумстам сорока, делённым примерно на тридцать девять с половиной, — около шести целых восьми сотых, а шесть целых восемь сотых, умноженные на семь шестых, — около семи целых девяти сотых. Значит, восьмое число Бернулли лежит между семью и восемью,

и по правилу простых его точное значение — шесть плюс половина плюс треть плюс пятая плюс семнадцатая, то есть три тысячи шестьсот семнадцать на пятьсот десять. Так Рамануджан поднимается по таблице ступень за ступенью до десятого числа.

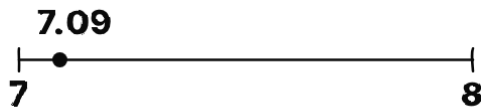
$$B_2 \rightarrow B_4 \rightarrow \cdots \rightarrow B_{20}$$

$$\frac{B_n}{B_{n-2}} = \frac{n(n-1)}{4\pi^2} \left(1 - \frac{2^2-1}{2^n-1}\right) \left(1 - \frac{3^2-1}{3^n-1}\right) \cdots$$

$$B_n \approx \frac{n(n-1)}{4\pi^2} B_{n-2}$$

$$\frac{16 \cdot 15}{4\pi^2} = \frac{240}{39.5} \approx 6.08$$

$$6.08 \times \frac{7}{6} \approx 7.09$$



$$6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17} = \frac{3617}{510}$$

Подъём по отношениям

Затем главный номер программы — число Бернулли с номером четыреста сорок четыре. Его дробная часть следует из правила простых: дробь со знаменателем девяносто миллионов семьсот девять тысяч семьсот десять. Формула для цифр даёт логарифм около шестисот тридцати целых двадцати четырёх сотых, так что в его целой части шестьсот тридцать одна цифра, начинающаяся с единицы, семёрки, пятёрки и единицы. Если прибавить логарифм знаменателя, в полном числителе шестьсот тридцать

девять цифр, начинающихся с единицы, пятёрки, восьмёрки и восьмёрки. А правило остатков из прежних параграфов — делимость на двадцать после вычитания одной тридцатой — определяет конец: целая часть кончается на четвёрку с чётной цифрой перед ней, а числитель — на пятьдесят семь с чётной цифрой перед ними. Современные программы подтверждают все эти утверждения о цифрах; один шаг использует его догадку о простом частном, которой, как мы видели, в общем случае доверять нельзя.

B_{444}

ЗНАМЕНАТЕЛЬ 90709710

$$\times \frac{n(n-1)}{4\pi^2}$$

ЦЕЛОЕ: 631 ЦИФРА, 1751...

...44

ЧИСЛИТЕЛЬ: 639 ЦИФР, 1588...

...457

Ч — ЧЁТНАЯ



ПРОВЕРЕНО КОМПЬЮТЕРОМ

ОДИН ШАГ: ДОГАДКА ?

Великан B444

Запомним

Формула Рамануджана для цифр даёт логарифм числа Бернулли по одному его номеру, а значит, количество его цифр и первые цифры. Каждое число Бернулли очень близко к предыдущему, умноженному на номер и на номер минус один и делённому на четыре пи в квадрате, что позволяет ему подниматься по таблице и устанавливать точные значения правилом простых. Для номера четыреста сорок четыре он описывает длину числа, его первые и последние цифры, ни разу его не выписав.

Вопросы

1. Что даёт формула Рамануджана для цифр по одному номеру?
 - a. Логарифм числа Бернулли, а значит, количество его цифр и первые цифры
 - b. Его точный числитель
 - c. Простое ли оно
 - d. Его знаменатель
2. Чему очень близко отношение числа Бернулли к числу на два места раньше?
 - a. Номеру, умноженному на номер минус один и делённому на четыре пи в квадрате
 - b. Двум

- c. Номеру, делённому на π
 - d. Единице
3. Какое из утверждений Рамануджана о числе с номером четыреста сорок четыре стоит не на твёрдой почве?
- a. Шаг, который использует его догадку о простом частном
 - b. Количество его цифр
 - c. Его первые цифры
 - d. Его дробная часть

Ответы

1. **a)** Его формула для цифр даёт десятичный логарифм числа Бернулли по его номеру, а это сообщает количество его цифр и первые цифры.
2. **a)** Отношение равно номеру, умноженному на номер минус один и делённому на четыре π в квадрате, с поправочными множителями, чрезвычайно близкими к единице.
3. **a)** Современные программы подтверждают все утверждения о цифрах; один шаг использует его догадку о простом частном, которой в общем случае доверять нельзя.

Разобранные примеры

Восьмое число Бернулли по седьмому С помощью отношения соседей для номера шестнадцать и седьмого числа Бернулли, семи шестых, найдите восьмое.

Множитель — шестнадцать на пятнадцать, то есть двести сорок, делённые на четыре π в квадрате, около тридцати девяти с половиной, — примерно шесть целых восемь сотых.

Шесть целых восемь сотых, умноженные на семь шестых, — около семи целых девяти сотых, так что число лежит между семью и восемью.

Правило простых даёт дробную часть: половина плюс треть плюс пятая плюс семнадцатая минус единица — это сорок семь на пятьсот десять.

Значит, точное значение — семь целых и сорок семь пятьсот десятых, то есть три тысячи шестьсот семнадцать на пятьсот десять.

Ответ: Три тысячи шестьсот семнадцать на пятьсот десять

Задачи

1. Сколько цифр у двойки в сотой степени?

Подсказка: Десятичный логарифм двух — около ноля целых трёхсот одной тысячной.

Ответ: Тридцать одна: сто, умноженное на ноль целых триста одну тысячную, — около тридцати целых одной десятой, а у числа с логарифмом тридцать с чем-то тридцать одна цифра.

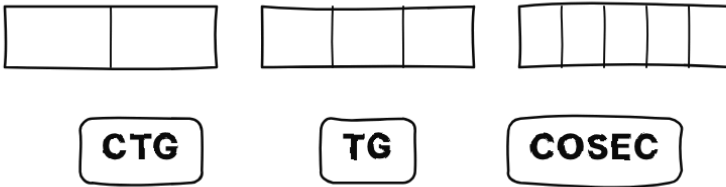
2. Формула для цифр даёт для числа с номером четыреста сорок четыре логарифм около шестисот тридцати целых двадцати четырёх сотых. Сколько цифр в его целой части?

Подсказка: Прибавьте единицу к целой части логарифма.

Ответ: Шестисот тридцать одна цифра.

Другие отправные точки и пятикратные сита

Представьте набор сит для сортировки гравия: одно делит его на две части, более мелкое — на три, ещё более мелкое — на пять. Метод Рамануджана до сих пор работал с числами Бернулли, как эти сита, а в этих параграфах он расширяет его в двух направлениях.



ПЛЮС СТЕПЕНИ 2

$$\frac{4}{3}B_n(2^n - 1) = c_6 B_{n-6}(2^{n-6} - 1) - \dots + \frac{1}{3}n$$

$$n = 6 : \quad \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{42} \cdot 63 = 2 = \frac{1}{3} \cdot 6 \quad \checkmark$$

$$\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \dots = \dots 3^k$$

$$n = 5 : \quad \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \quad \checkmark$$

Тангенс и косеканс

Во-первых, начальная функция. Всё до сих пор начиналось с котангенса, но он замечает, что тангенс и косеканс, две другие

функции из школьной тригонометрии, работают ничуть не хуже. Они дают соотношения того же рода, только теперь к ним примешаны степени двойки. Одно из них говорит, что четыре трети числа Бернулли, умноженные на два в степени его номера без единицы, равны знакопередающейся сумме более ранних чисел Бернулли, идущих через шесть, каждое с похожим множителем, плюс последний член — треть или шестая часть номера. Проверьте его для номера шесть: четыре трети, умноженные на одну сорок вторую и на шестьдесят три, дают два; и последний член, треть от шести, тоже равен двум. Второе соотношение использует множители вида «единица минус степень половины», а в другой части — степени тройки; для номера пять обе части равны пяти шестым.

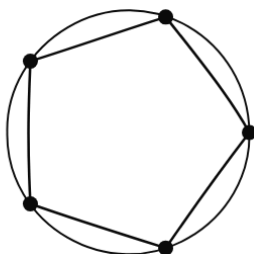
Во-вторых, число способов сокращения. Рамануджан называет свои прежние результаты формулами с интервалом один, два и три — по тому, насколько далеко друг от друга стоят уцелевшие числа Бернулли. Затем он формулирует общее правило: возьмите числа, p -я степень которых равна единице, или, при чётном p , мнимой единице, вставьте их в котангенс — и вы получите формулы с интервалом p . Каждая такая формула оставляет лишь одну нить чисел Бернулли, идущих через удвоенное p .

КАК СОКРАЩАТЬ

ИНТЕРВАЛ 1 ИНТЕРВАЛ 2 ИНТЕРВАЛ 3

$$\omega^p = 1 \text{ (or } i) \rightarrow \cot \rightarrow p\text{-interval}$$

spacing $2p$



$$\sum_{k=0}^4 \sin x \alpha^k$$
$$= 5 \left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^{15}}{15!} + \dots \right)$$

КАЖДАЯ ДЕСЯТАЯ

Пять корней на пятиугольнике

Он разбирает случай пяти. Пять корней пятой степени из единицы стоят в вершинах правильного пятиугольника на окружности. Если сложить синусы x икс, умноженного на каждый из них, сократится всё, кроме каждой десятой степени: сумма равна пяти, умноженному на x в пятой, делённое на пять факториал, минус x в пятнадцатой, делённое на пятнадцать факториал, и так далее. Тогда произведение пяти синусов превращается в комбинацию этой суммы при трёх особых значениях аргумента, в которые входит единица плюс или минус корень из пяти. Корень из пяти приводит с собой золотое сечение, около одной целой шестисот восемнадцати тысячных, а вместе с ним — последовательность целых чисел, построенных из его степеней: один, три, четыре, семь, одиннадцать, каждое —

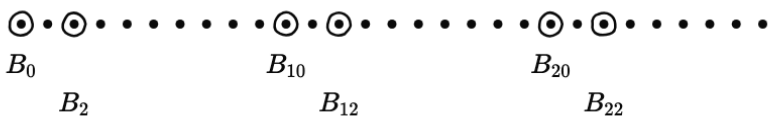
сумма двух предыдущих, близкие родственники чисел Фибоначчи.

$$1 \pm \sqrt{5}$$

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

1, 3, 4, 7, 11, ...

3 + 4 = 7, 4 + 7 = 11



$$-x \cdot \frac{x^4/24}{x^5/120} = -5$$

✓

КОСИНУСЫ: ЕЩЁ

И TG, И COSEC

spacing 2p

Нити золотого сечения

С этими целыми числами он записывает пять новых формул, каждая — отношение двух рядов, выделяющее одну нить: числа Бернулли с номерами ноль, десять, двадцать; затем с номерами два, двенадцать, двадцать два; и так далее. Первую можно проверить: при очень малом икс её правая часть — минус икс, умноженный на икс в четвёртой, делённое на двадцать четыре, и делённый на икс в пятой, делённое на сто двадцать, то есть минус пять; левая часть начинается с пяти, умноженных на нулевое число Бернулли, а поскольку оно равно минус единице, это минус пять, так что обе части совпадают. Он добавляет, что

похожее тождество, построенное из произведения пяти косинусов, даёт ещё множество таких тождеств.

Запомним

Тангенс и косеканс могут заменить котангенс и дают новые соотношения между числами Бернулли, которые подтверждаются для малых номеров. Если вставить в котангенс корни p -й степени из единицы, получатся формулы с интервалом p , каждая из которых оставляет нить чисел Бернулли, идущих через удвоенное p . В случае интервала пять пятиугольник приводит с собой золотое сечение и целые числа один, три, четыре, семь, одиннадцать, и каждая формула выделяет каждое десятое число Бернулли по номеру.

Вопросы

1. Какие функции могут заменить котангенс в качестве отправной точки?
 - a. Тангенс и косеканс
 - b. Логарифм и экспонента
 - c. Квадратный корень
 - d. Только синус
2. Что оставляет формула с интервалом p ?
 - a. Одну нить чисел Бернулли, идущих через удвоенное p

- b. Все числа Бернулли
 - c. Только первые p чисел Бернулли
 - d. Только числа Бернулли с простыми номерами
3. Откуда в случае интервала пять берётся золотое сечение?
- a. Из корня из пяти, который появляется вместе с корнями пятой степени из единицы
 - b. Из числа π
 - c. Из факториала
 - d. Из знаменателей

Ответы

1. a) Он замечает, что тангенс и косеканс работают ничуть не хуже котангенса.
2. a) Каждая такая формула оставляет лишь одну нить чисел Бернулли, идущих через удвоенное p .
3. a) Корень из пяти приводит с собой золотое сечение, около одной целой шестисот восемнадцати тысячных.

Разобранные примеры

Соотношение с тангенсом для номера шесть Проверьте первое соотношение с тангенсом для номера шесть: четыре трети третьего числа Бернулли, одной сорок второй, умноженные на два в шестой степени без единицы, должны равняться последнему члену — трети от шести.

Два в шестой степени — шестьдесят четыре, без единицы — шестьдесят три.

Четыре трети на одну сорок вторую на шестьдесят три: шестьдесят три сорок вторых — это три вторых, а четыре трети от трёх вторых — два.

Треть от шести — тоже два, так что обе части совпадают.

Ответ: Обе части равны двум

Задачи

1. Продолжите ряд целых чисел один, три, четыре, семь, одиннадцать: какие два следующих?

Подсказка: Каждое равно сумме двух предыдущих.

Ответ: Восемнадцать и двадцать девять: семь плюс одиннадцать — восемнадцать, одиннадцать плюс восемнадцать — двадцать девять.

2. Какие числа Бернулли, по номерам, оставляет первая формула в случае интервала пять?

Подсказка: Нити идут через удвоенное пять.

Ответ: С номерами ноль, десять, двадцать, тридцать и так далее.

Четырёхкратное сито и окончательный вердикт

Пятикратное сито из прошлой части работало на золотом сечении; четырёхкратное работает на корне из двух. Рамануджан строит две вспомогательные последовательности из чисел «единица плюс единица, делённая на корень из двух» и «единица минус та же дробь». Первая складывает их степени, вторая вычитает. При сложении иррациональные части сокращаются: для второй степени два квадрата в сумме дают три, а для третьей — пять. Последовательности подчиняются простым правилам построения, так что каждое значение получается из предыдущих — так же, как было с числами золотого сечения.

$$1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

$$a_2 = 3, \quad a_3 = 5$$

$$a_{m+n} = a_m a_n - a_{m-n} / 2^n$$

$$B_0, B_8, B_{16}, \dots$$

$$B_2, B_{10}, B_{18}, \dots$$

$$B_4, B_{12}, B_{20}, \dots$$

$$B_6, B_{14}, B_{22}, \dots$$

$$-x \cdot \frac{x^3/6}{x^4/24} = -4 = 4B_0 \quad \checkmark$$

СИТА 2, 3, 4, 5

Четырёхкратное сито

С их помощью он записывает четыре формулы, каждая — отношение двух рядов, оставляющее одну нить чисел Бернулли с шагом восемь по номеру: нулевое, восьмое, шестнадцатое; затем второе, десятое, восемнадцатое; затем четвёртое, двенадцатое, двадцатое; и наконец шестое, четырнадцатое, двадцать второе. Первую легко проверить: при очень малом x правая часть — минус x , умноженный на x в кубе, делённое на шесть, и делённый на x в четвёртой, делённое на двадцать четыре, то есть минус четыре, а левая часть начинается с четырёх, умноженных на нулевое число Бернулли, минус единицу, — это тоже минус четыре. На этом статья заканчивается: одна идея — сокращение членов с помощью корней из единицы или из мнимой единицы — дала сита на два, три, четыре и пять.

Затем в книге напечатано примечание редакторов собрания статей, и это подходящее место, чтобы подвести итоги. Сначала мелкие уточнения: Рамануджан нумерует числа Бернулли иначе, чем большинство книг, а числа-коэффициенты в его равенствах — это обычные биномиальные коэффициенты. Его быстрое рекуррентное соотношение верно для нечётных номеров больше единицы, причём его последний член бывает трёх видов.

РЕДАКТОРЫ

ИННАЯ НУМЕРАЦИЯ

c_k binomial

(12): odd $n > 1$

ДВА ВЫВОДА НЕВЕРНЫ ✕

ИЗВЕСТНО: ШТАУДТ-КЛАУЗЕН, ЭЙЛЕР

ЕСЛИ ДОКАЗАТЬ	СЛЕДУЕТ	ГИПОТЕЗА
●	●	●
● ?	●	●
●		●

РАЗЛИЧАЙТЕ

Три вида утверждений

Теперь вердикт. Два его вывода — те, что превращали формулу для величины и хвост обратных квадратов в интегралы, — в таком виде неверны, потому что ряд под интегралом перестаёт сходиться. Его главные арифметические результаты уже были известны: правило дробных частей — это теорема фон Штаудта —

Клаузена, а утверждение о нечётности следует из неё и было известно Эйлеру. Из восьми своих арифметических утверждений он указал доказательства для трёх — утверждения о нечётности, правила дробных частей и правила о равных знаменателях; но эти доказательства опираются на его утверждения о том, что у некоторых рядов целые коэффициенты, а эти утверждения так и не доказаны. Ещё два — утверждение о степени двойки и утверждение о простом частном — поданы как следствия других. А три — о простом числителе, о множителях два и три в каждом знаменателе и правило знаменателей — высказаны лишь как гипотезы.

Так что в этой статье есть три вида утверждений: гипотезы, прочитанные по таблице; следствия, надёжные ровно настолько, насколько надёжно то, на чём они стоят; и условные доказательства, ждущие одного недоказанного шага. Умение различать их — самое полезное, чему может научить эта статья. По словам редакторов, статья интересна как образец самой ранней манеры Рамануджана — до того, как он научился подкреплять свои озарения доказательствами. Этот курс прошёл вместе с его первой статьёй путь от котангенса до этого вердикта, и здесь он заканчивается.

ОЗАРЕНИЕ

→ДОКАЗ.

РАННЯЯ МАНЕРА

КОНЕЦ

НИТИ ЧЕРЕЗ 8, ИЗ $1 \pm 1/\sqrt{2}$

ИТОГИ ИЗВЕСТНЫ, ДОК. УСЛОВНЫ

3 УСЛОВНЫХ, 2 СЛЕДСТВИЯ, 3 ДОГАДКИ

От озарения к доказательству

Запомним

Формулы с интервалом четыре используют вспомогательные последовательности, построенные из единицы плюс или минус единица, делённая на корень из двух, и каждая оставляет нить чисел Бернулли с шагом восемь; первая сходится с нулевым числом. Редакторы отмечают, что некоторые выводы в записанном виде неверны, что основные результаты были известны фон Штаудту, Клаузену и Эйлеру и что указанные Рамануджаном доказательства опираются на недоказанные утверждения о целых коэффициентах. Из восьми его арифметических утверждений три — гипотезы, два — следствия и у трёх есть лишь условные доказательства; такую сортировку стоит держать в голове всякий раз, когда вы читаете математику.

Вопросы

1. Что оставляет каждая из формул с интервалом четыре?
 - a. Нить чисел Бернулли с шагом восемь по номеру
 - b. Все числа Бернулли
 - c. Только первые четыре числа Бернулли
 - d. Каждое второе число Бернулли
2. Почему указанные Рамануджаном доказательства не считаются полными?

- a. Они опираются на утверждения о том, что у некоторых рядов целые коэффициенты, а эти утверждения так и не доказаны
 - b. В них не те числа Бернулли
 - c. Они слишком длинные
 - d. Они так и не были записаны
3. Какие три утверждения примечание редакторов относит к простым гипотезам?
- a. О простом числителе, о множителях два и три в каждом знаменателе и правило знаменателей
 - b. Утверждение о нечётности, правило дробных частей и правило о равных знаменателях
 - c. Утверждение о степени двойки и утверждение о простом частном
 - d. Все восемь

Ответы

1. а) Каждая — отношение двух рядов, оставляющее одну нить чисел Бернулли с шагом восемь по номеру.
2. а) Эти доказательства опираются на его утверждения о том, что у некоторых рядов целые коэффициенты, а эти утверждения так и не доказаны.
3. а) Три — о простом числителе, о множителях два и три в каждом знаменателе и правило знаменателей — высказаны лишь как гипотезы.

Разобранные примеры

Проверка первой формулы с интервалом четыре При очень малом x сравните правую часть первой формулы с интервалом четыре — минус x , умноженный на x в кубе, делённое на шесть, и делённый на x в четвёртой, делённое на двадцать четыре, — с левой частью, четырьмя нулевыми числами Бернулли.

x в кубе на шесть, делённое на x в четвёртой на двадцать четыре, — это двадцать четыре шестых, делённые на x , то есть четыре, делённое на x .

Умножение на минус x даёт минус четыре.

Нулевое число Бернулли равно минус единице, так что четыре таких числа — тоже минус четыре.

Обе части совпадают.

Ответ: Обе части равны минус четырём

Задачи

1. Сложите квадраты чисел «единица плюс единица, делённая на корень из двух» и «единица минус единица, делённая на корень из двух».

Подсказка: Каждый квадрат — это единица, плюс или минус корень из двух, плюс одна вторая.

Ответ: Три: плюс и минус корень из двух сокращаются, остаётся дважды полторы.

2. Опишите своими словами три вида утверждений, которые различают редакторы, и объясните, почему это различие важно.

Подсказка: Подумайте о догадке, о следствии и о рассуждении с недостающим шагом.

Ответ: Гипотеза — догадка по примерам; следствие надёжно ровно настолько, насколько надёжно утверждение, из которого оно вытекает; условное доказательство полно во всём, кроме одного недоказанного шага. Различая их, вы знаете, насколько доверять каждому результату, а это важно, потому что одни гипотезы Рамануджана верны, а одна ложна.