

Собрание статей Сринивасы Рамануджана



Srinivasa Ramanujan · 1927

Иллюстрированные аудиолекции

Lecturized

Собрание статей Сринивасы Рамануджана

Иллюстрированные аудиолекции

Srinivasa Ramanujan · 1927

Пересказано в иллюстрированных лекциях Lecturized
lecturized.com

По оригиналу: Collected Papers of Srinivasa Ramanujan, ed. G. H. Hardy, P. V. Seshu
Aiyar and B. M. Wilson (Cambridge, 1927)

Содержание

Рецепт внутри котангенса

Три верёвки и таблица образцов

Угадываем правила по таблице

Сыскная работа и доказательство, оставленное висеть

Измеряем великанов издалека

Сита всё мельче — и честный вердикт

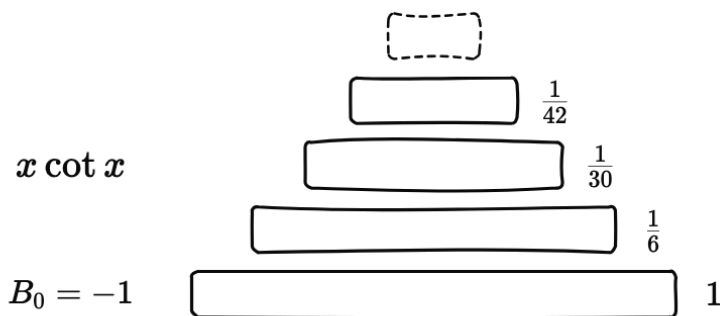
Рецепт внутри котангенса

Представьте, что вы нашли карточку с рецептом, где количество каждого ингредиента — странная дробь, и подозреваете, что дроби подчиняются правилу, которое никто не записал.

Примерно в таком положении был Рамануджан в 1911 году, молодой конторский служащий из Мадраса, когда отправил свою первую статью в Журнал Индийского математического общества.

Странные дроби — это числа Бернулли: одна шестая, одна тридцатая, одна сорок вторая, а дальше всё больше и больше.

Они появляются везде, где математики складывают степени, оценивают факториалы или изучают простые числа.



Блюдо из слоёв

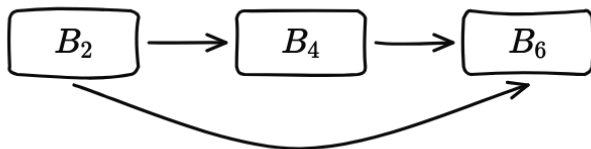
Рамануджан встречается их в знакомом месте: в котангенсе из школьной тригонометрии, умноженном на угол. Вблизи нуля эту функцию можно собрать как длинную сумму всё более простых кусочков, словно блюдо, сложенное из слоёв. Количество каждого слоя задаётся одним числом Бернулли. В записи Рамануджана все они положительны, а чтобы первый слой не выбивался из ряда, он договаривается считать нулевое число равным минус единице. Так что вопрос статьи — вопрос повара: если блюдо известно, как прочесть количество каждого ингредиента?

Его первый ответ — записать то же блюдо тремя разными способами, пользуясь тремя школьными тождествами для

котангенса. Когда два описания одного и того же равны, каждый слой должен совпасть с соответствующим слоем на другой стороне. Сравнивая их по одному, получаешь цепочку уравнений, и её решение выдаёт числа Бернулли по порядку: сначала одну шестую, потом одну тридцатую, потом одну сорок вторую. Это работает, но похоже на рецепт, где каждый новый шаг требует заново взвесить все прежние: чем дальше, тем больше приходится нести с собой — все прежние числа на каждом шаге. Рамануджан, считавший вручную на грифельной доске, прямо говорит, что это становится утомительным, и принимается искать короткие пути.

$$(x \cot x)^2$$

$$B_2 B_2, \quad B_2 B_4, \quad \dots$$



Сверяем слой за слоем

Первый короткий путь умножает блюдо само на себя. Есть точное правило, чему равен квадрат этой функции, и сравнение слоёв квадрата даёт новую цепочку, где каждое число Бернулли получается из произведений прежних пар. Она приводит к тем же значениям другой дорогой — немного похоже на проверку суммы, когда столбец складывают снизу вверх, а не сверху вниз.

Второй короткий путь хитрее. У котангенса есть двойник, гиперболический котангенс: его получают, подставив в ту же функцию мнимый угол. Если сложить их, каждый второй слой гасится — так две волны могут погасить друг друга; если вычесть, гасится другая половина. Значит, каждую половину семейства можно изучать отдельно, и получающимся уравнениям нужно вдвое меньше прежних чисел, чем раньше. Тот же приём работает и с тангенсом и его гиперболическим двойником.

СТГ

СТН

СУММА

БЫЛО

СТАЛО

TG + TH

Двойники, которые гасят друг друга

Эта привычка проходит через всю статью: найти хитрое сочетание, которое заглушает большинство членов, чтобы оставшиеся можно было найти с меньшим трудом. Конструктор калькуляторов сегодня делает ровно то же: выбирает формулы, которым нужно меньше всего операций, чтобы получить верные цифры.

Запомним

Числа Бернулли — это скрытые количества, из которых складывается котангенс, умноженный на угол; Рамануджан берёт их все положительными, а нулевое считает равным минус единице. Запись одной и той же функции разными способами и сравнение её слоёв дают их по порядку, но каждому новому нужны все прежние. Возведение функции в квадрат или её пара с гиперболическим двойником, при которой каждый второй слой гасится, дают более быстрые цепочки, которым нужно вдвое меньше прежних чисел.

Вопросы

1. Почему Рамануджан договаривается считать нулевое число Бернулли равным минус единице?
 - a. Потому что все его числа Бернулли отрицательны
 - b. Чтобы первый слой ряда котангенса не выбивался из ряда остальных
 - c. Потому что вблизи нуля котангенс отрицателен
 - d. Чтобы сделать цепочку уравнений короче
2. Почему запись одной функции разными способами даёт уравнения?
 - a. Потому что два равных описания должны совпадать слой за слоем

- b. Потому что каждое описание даёт свой ответ, и их надо усреднить
 - c. Потому что верно только одно описание
 - d. Потому что котангенс — многочлен
3. Что плохо в первой цепочке уравнений?
- a. Она даёт неверные значения
 - b. Каждому новому шагу нужны все прежние числа, так что работа всё растёт
 - c. Она работает только для первых трёх чисел
 - d. Ей нужен мнимый угол
4. Чего достигает пара котангенса с его гиперболическим двойником?
- a. Каждый второй слой гасится, и каждой половине семейства нужно вдвое меньше прежних чисел
 - b. Все слои становятся равными
 - c. Прежние числа становятся вовсе не нужны
 - d. Дробь превращаются в целые числа

Ответы

1. **b)** В его записи все они положительны, а если считать нулевое минус единицей, первый слой не выбивается из ряда остальных.
2. **a)** Когда два описания одного и того же равны, каждый слой должен совпадать с соответствующим слоем на другой стороне, и каждое совпадение — уравнение.
3. **b)** Каждый новый шаг требует заново взвесить все прежние, так что чем дальше, тем больше приходится нести с собой.

4. а) Сложение гасит каждый второй слой, вычитание — другую половину, так что каждую половину можно изучать отдельно, и ей нужно вдвое меньше прежних чисел.

Задачи

1. Объясните своими словами, почему сокращение половины членов ускоряет нахождение чисел Бернулли.

Подсказка: Подумайте, сколько прежних чисел каждому новому шагу приходится нести с собой.

Ответ: В первой цепочке каждое новое число зависит от всех прежних, так что работа растёт шаг за шагом. Когда половина членов гасится, каждая половина семейства зависит только от своих членов, так что каждому новому числу нужно вдвое меньше прежних, и работа на каждом шаге примерно вдвое меньше.

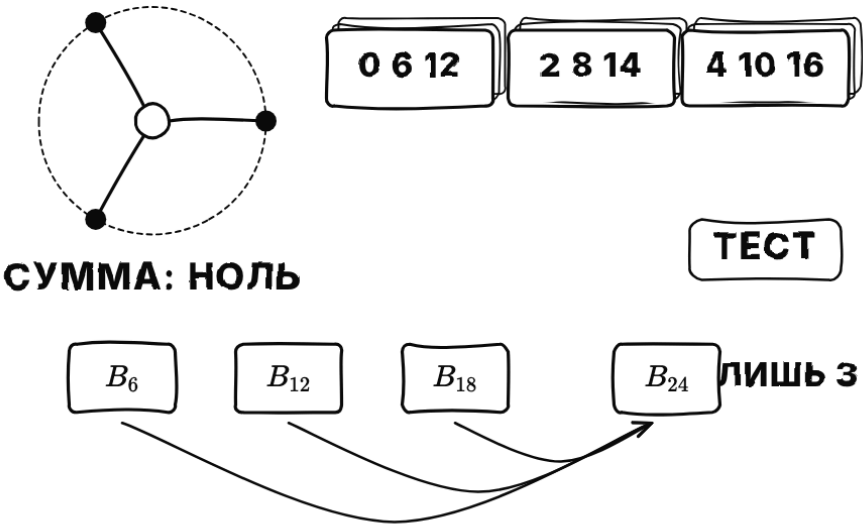
2. Чем полезна вторая, другая дорога к тем же значениям, например через квадрат функции?

Подсказка: Подумайте, как бухгалтер проверяет длинную сумму.

Ответ: Вторая дорога, приводящая к тем же значениям, служит проверкой: если оба пути дают одно и то же число, ошибка в арифметике маловероятна — так же, как сложение столбца снизу вверх и сверху вниз должно давать один итог.

Три верёвки и таблица образцов

Представьте кольцо с тремя привязанными верёвками на треть оборота друг от друга и трёх друзей, которые тянут их одинаково сильно. Кольцо не сдвигается: три тяги идеально гасят друг друга. Следующий короткий путь Рамануджана использует ровно такое равновесие, только вместо верёвок — числа.



Три верёвки, три стопки

В прошлой части пара котангенса с его гиперболическим двойником гасила каждый второй член. Теперь он берёт трёх партнёров вместо двух. Они происходят из кубических корней из

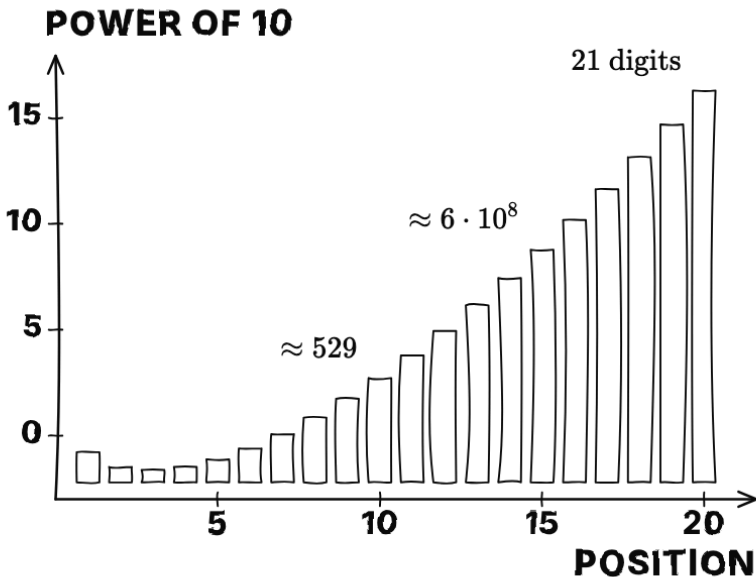
единицы: числа один и двух комплексных чисел, сидящих на окружности на треть оборота от него, которые, как три верёвки, в сумме дают ничто. Когда он подаёт все три в котангенс и складывает результаты, гаснут два члена из каждых трёх. Выживает тонкая нить чисел Бернулли — каждое шестое, — а сдвигая смесь, он получает и две другие нити. Это похоже на раскладку колоды карт на три стопки, чтобы каждую можно было пересчитать отдельно.

У каждой нити своё простое описание, и из этих описаний он получает новую цепочку уравнений. В этой цепочке каждому новому числу Бернулли нужна лишь треть прежних чисел, которые требовал самый первый способ, так что ручной работы становится намного меньше. Чтобы получить, например, число на двадцать четвёртом месте, ему нужны лишь три прежних.

Он получает и второе, совсем другое соотношение, в котором каждое число строится из произведений пар прежних. Для вычислений он его не использует — он держит его для проверки. Это та же привычка, что у бухгалтера, который складывает столбец дважды разными путями, или у программиста, который проверяет быструю программу медленной, но надёжной. Если обе дороги приводят к одной и той же дроби, ошибка в арифметике очень маловероятна.

Подготовив эти инструменты, Рамануджан переходит от метода к наблюдению. Он объясняет, что хочет открыть свойства этих чисел и что для этого удобно иметь их перед глазами в достаточном количестве. Поэтому он вычисляет их по очереди и выписывает первые двадцать — таблицу образцов, вроде тех, что

натуралист накалывает в коробку, прежде чем искать закономерность.



Кротно, потом взрывно

Таблица рассказывает яркую историю. Первые значения — кроткие дроби: одна шестая, одна тридцатая, одна сорок вторая и снова одна тридцатая. Потом они начинают расти, сначала медленно, а затем взрывно: десятое уже больше пятисот, пятнадцатое — около шестисот миллионов, а у двадцатого числитель длиной в двадцать одну цифру. Знаменатели дробей при этом остаются довольно маленькими, в тысячах или десятках тысяч, и Рамануджан отмечает, что последовательность растёт без всякого предела.

Сегодня система компьютерной алгебры печатает эту таблицу в мгновение ока. В 1911 году каждая клетка была ручной работой, поэтому рецепт, которому нужна лишь треть прежних чисел, плюс независимая проверка решали, будет ли таблица полна ошибок или надёжна. Именно эту таблицу Рамануджан изучал дальше, ища скрытые правила в числителях и знаменателях этих дробей.

Запомним

Три кубических корня из единицы в сумме дают ничто, как три равные тяги на кольцо, и если подмешать их в котангенс, гаснут два члена из каждых трёх. Это раскладывает числа Бернулли на три нити — каждое шестое — и даёт цепочку, которой нужна лишь треть прежних чисел. Второе соотношение, построенное из произведений пар, служит независимой проверкой арифметики. С этими инструментами Рамануджан вычисляет таблицу из двадцати чисел Бернулли — сначала кроткие дроби, потом огромные числа со скромными знаменателями, — сырьё для его поиска закономерностей.

Вопросы

1. Что происходит, когда три кубических корня из единицы подают в котангенс и складывают результаты?
 - а. Гаснут два члена из каждых трёх, и остаётся одна нить

- b. Все члены удваиваются
 - c. Ряд становится конечным
 - d. Гаснет каждый второй член
2. Зачем Рамануджан держит рядом с быстрой цепочкой второе соотношение из произведений пар?
- a. Потому что оно быстрее
 - b. Для проверки: две разные дороги к одной дроби делают ошибку очень маловероятной
 - c. Потому что быстрая цепочка даёт неверные ответы
 - d. Чтобы найти знаменатели
3. Что показывает таблица из двадцати значений?
- a. Значения неуклонно уменьшаются
 - b. Сначала кроткие дроби, потом взрывной рост, а знаменатели остаются маленькими
 - c. Только целые числа
 - d. Значения, повторяющиеся через каждые шесть мест

Ответы

1. **a)** Как три равные тяги на кольцо, три числа уравнивают друг друга, и гаснут два члена из каждых трёх.
2. **b)** Для вычислений он его не использует — он держит его для проверки, как столбец, сложенный дважды разными путями.
3. **b)** Первые значения — кроткие дроби, потом они взрывно растут, а знаменатели дробей остаются довольно маленькими.

Задачи

1. Объясните на своём примере, почему разделение чисел Бернулли на три нити экономит работу.

Подсказка: Подумайте о раскладке чего-нибудь на стопки перед подсчётом.

Ответ: Если большую кучу монет разложить на три кучки поменьше, каждую можно пересчитать отдельно; так же и каждую нить чисел Бернулли можно вычислять по немногим её прежним членам, так что каждому новому числу нужна лишь примерно треть прежних.

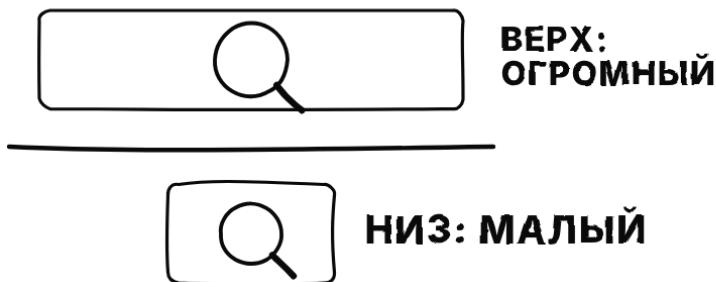
2. Почему скорость рецепта в 1911 году значила для Рамануджана больше, чем значила бы сегодня?

Подсказка: Подумайте, как числа вычисляли тогда и сейчас.

Ответ: Каждое значение получали вручную, а числа быстро разрастаются до многих цифр, так что каждый лишний член означал долгую арифметику с риском ошибок. Сегодня система компьютерной алгебры печатает всю таблицу мгновенно.

Угадываем правила по таблице

Представьте, что вы собрали двадцать ракушек и начинаете их сортировать: ребристые сюда, спиральные туда, — и начинаете подозревать правило, какие формы идут с какими цветами. Таково настроение следующего отрезка статьи. У Рамануджана есть таблица из двадцати чисел Бернулли, и он начинает формулировать, что в них видит. Он осторожно говорит «можно заметить» и обещает объяснения только позже, так что это догадки, прочитанные по образцам, а не доказательства.



Две половины дроби

Каждое число Бернулли — дробь с верхом и низом, и эти две половины ведут себя совсем по-разному. Низы — небольшие аккуратные числа, а верхи разрастаются до огромных и выглядят случайными. Поэтому Рамануджан изучает две половины по отдельности — так сыщик изучает отдельно следы и отпечатки пальцев, прежде чем сложить историю.

Для низов он находит правило настолько простое, что оно годится в игру с карандашом. Берёте номер числа Бернулли, выписываете всё, что его делит, к каждому прибавляете единицу, оставляете только простые и перемножаете: это и есть низ дроби. Это совпадает с каждым значением в его таблице. Он замечает и то, что оставшийся кусочек каждого числа, после отбрасывания целой части, построен из тех же простых чисел, и что когда у двух чисел Бернулли одинаковый низ, их разность или сумма, смотря по паре, всегда оказывается целым числом. Эти правила для низов оказываются полностью верными: это теорема, которую двое математиков, Клаузен и фон Штаудт, нашли лет на семьдесят раньше, а Рамануджан открыл заново в одиночку.

НОМЕР 24

	1	2	3	4	6	8	12	24
+1 ↓	2	3	~~4~~	5	7	~~9~~	13	~~25~~

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 2730$$

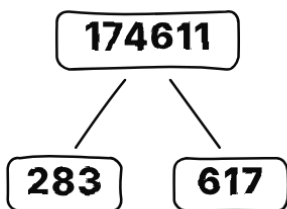


Игра с карандашом

С верхами он смелее. Он предполагает, что после небольшой поправки верх всегда простое число и что простое число, делящее номер, обязано появиться либо вверху, либо внизу, но не пропасть совсем. Он видит и то, что некоторые сочетания числа Бернулли со степенями двойки всегда дают нечётные целые числа, а некоторые дают числа, которые при делении на тридцать дают в остатке единицу.

ВЕРХ: ПРОСТОЙ?

НЕЧЁТНЫЕ



ЭЙЛЕР

ГИПОТЕЗЫ

Смелая догадка ломается

Здесь история требует предупредительной наклейки.

Закономерность с нечётностью верна и была известна ещё Эйлеру, а вот догадка, что верх всегда простой, попросту ложна: она ломается на десятом числе его собственной таблицы.

Редакторы, собравшие его статьи после его смерти, говорят об этом прямо: несколько этих утверждений были высказаны лишь как гипотезы, а доказательства, которые он набрасывает позже, опираются на шаги, которых он так и не доказал.

Это не провал — так математика часто и движется. Кто-то пристально смотрит на данные и записывает смелые догадки; потом другие их проверяют, и каждая догадка становится либо теоремой, либо уроком. Современные исследователи делают то

же с компьютерами: генерируют огромные таблицы чисел и ищут закономерности, которые затем пытаются доказать специалисты. Рамануджан просто делал это вручную, в двадцать три года, с поразительным чутьём на то, какие закономерности настоящие.

Запомним

По своей таблице Рамануджан изучает верхи и низы чисел Бернулли по отдельности и формулирует, что наблюдает. Его правило для низов, построенное из простых чисел, стоящих на единицу выше делителей номера, полностью верно — это известная теорема, которую он открыл заново. Его догадки о верхах смелее: некоторые, вроде закономерности с нечётностью, верны, но утверждение, что верх всегда простой, ложно, и редакторы перечисляют несколько этих утверждений как гипотезы, а не доказанные факты.

Вопросы

1. Почему утверждения на этом отрезке статьи — догадки, а не доказательства?
 - а. Потому что Рамануджан говорит, что они замечены по таблице, и обещает объяснения только позже
 - б. Потому что редакторы убрали доказательства
 - с. Потому что они переписаны из другой книги

- d. Потому что они касаются только первого числа
2. Что стало с его правилом для низов чисел Бернулли?
- a. Оно оказалось ложным
 - b. Оно оказалось полностью верным — теоремой, которую раньше нашли Клаузен и фон Штаудт
 - c. Его так и не проверили
 - d. Оно работает только для первых пяти чисел
3. Какая из его догадок о верхах ложна?
- a. Что некоторые сочетания — нечётные целые числа
 - b. Что после небольшой поправки верх всегда простой
 - c. Что простые из номера появляются в верху или в низу
 - d. Что числа растут

Ответы

1. a) Он осторожно говорит «можно заметить» и обещает объяснения только позже, так что это догадки, прочитанные по образцам.
2. b) Эти правила для низов полностью верны: это теорема, которую Клаузен и фон Штаудт нашли лет на семьдесят раньше, а Рамануджан открыл заново в одиночку.
3. b) Закономерность с нечётностью верна и была известна Эйлеру, а догадка, что верх всегда простой, ломается на десятом числе его собственной таблицы.

Задачи

1. Объясните своими словами, чем полезно изучать верхи и низы дробей по отдельности.

Подсказка: Подумайте, как по-разному ведут себя две половины в таблице.

Ответ: Низы маленькие и аккуратные, а верхи огромные и выглядят случайными, так что они, вероятно, подчиняются правилам разного рода. Если смотреть на каждую половину отдельно, становится видно простое правило для низов, вместо того чтобы прятать его внутри дробей, которые целиком выглядят беспорядочно.

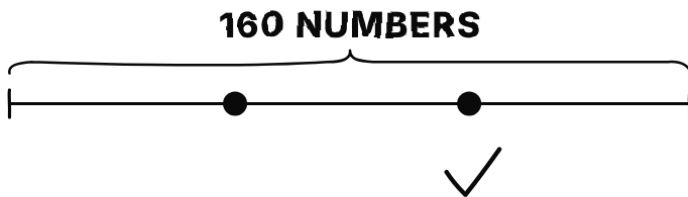
2. Объясните, почему ложная догадка вроде правила о простом верхе всё же может быть ценной в математике.

Подсказка: Подумайте, что происходит после того, как догадка записана.

Ответ: Высказанную догадку можно проверить. Если она не выдерживает, контрпример показывает, где именно ошиблась интуиция, и не даёт другим на ней строить; если выдерживает, кто-то её доказывает. В обоих случаях догадка двигает предмет вперёд — так и случилось с таблицей Рамануджана.

Сыскная работа и доказательство, оставленное висеть

Представьте сыщика, который знает лишь, что подозреваемому от тридцати до сорока, он левша и у него красная машина. Каждая улика по отдельности оставляет многих людей; вместе они оставляют двоих-троих. На этом отрезке статьи Рамануджан становится таким сыщиком, а его подозреваемый — число Бернулли.



СВИДЕТЕЛЬ НЕНАДЁЖЕН

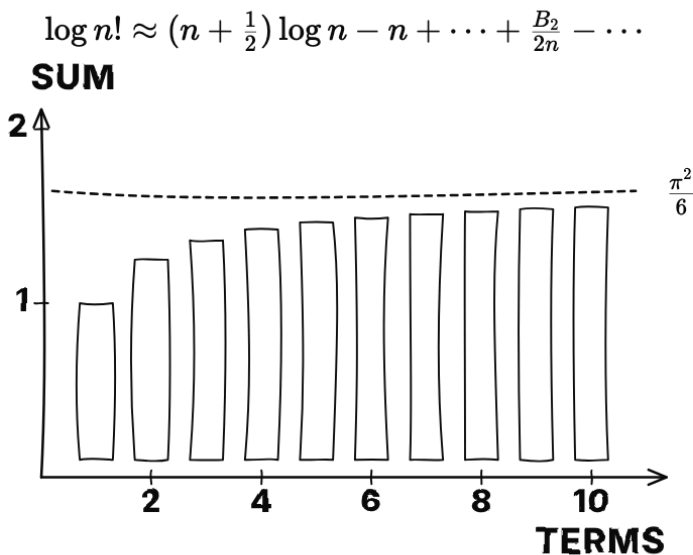
Два подозреваемых сыщика

Его дело — число Бернулли на одиннадцатом месте его таблицы. Он делает вид, что знает лишь грубые пределы его величины — диапазон из ста шестидесяти целых чисел. Затем он предъявляет улики. Оставшаяся дробь после целой части определяется простыми числами знаменателя, так что эта часть известна точно. Простое число, делящее номер, но отсутствующее в знаменателе, должно делить верх дроби. А правило об остатках при делении на пять отсекает большую часть оставшегося. Выживают только два кандидата.

Чтобы выбрать между ними, он пускает в ход ещё одну улику: свою догадку, что верх после деления на это простое число сам является простым. Один кандидат эту проверку не проходит, поэтому он оставляет другого, и это действительно значение из его таблицы. Но улика, по которой он решал, ненадёжна: у выбранного им числа верх после деления тоже не простой. Он вышел на верного подозреваемого отчасти благодаря удаче, с одним ненадёжным свидетелем.

Откуда вообще берутся грубые пределы? Здесь он заимствует классический мост. Есть знаменитая сумма: сложите единицы, делённые на каждое целое число в квадрате, или в кубе, или в любой чётной степени, — и получится определённое число; для квадратов это $\pi^2/6$ в квадрате, делённое на шесть. Мост гласит, что каждое число Бернулли равно факториалу, делённому на степень двух π и умноженному на одну из этих сумм. При больших номерах сумма едва превышает единицу, так что величина числа Бернулли — это по сути факториал против степени двух π , и это объясняет, почему таблица взрывается. Ту же сумму можно записать и как произведение с одним множителем на каждое

простое число — намёк на то, что простые числа вплетены в эти числа с самого начала.

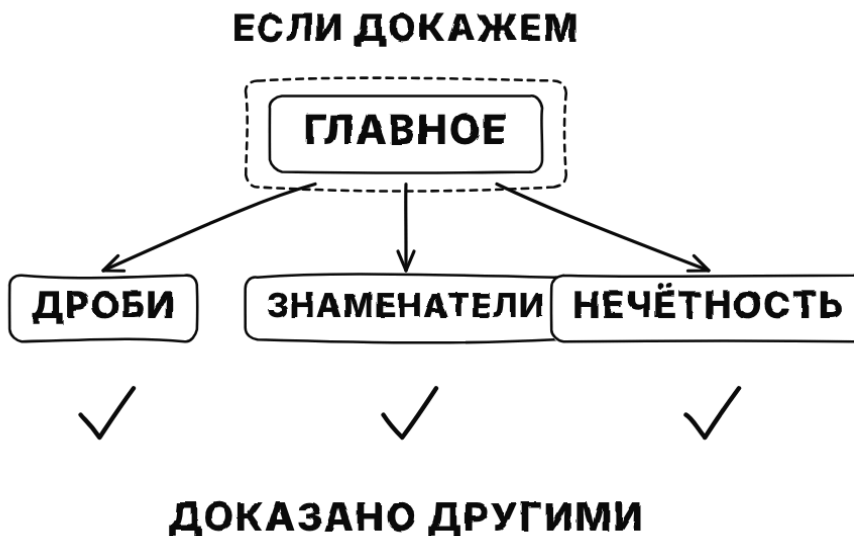


Сумма, которая устанавливается

Рамануджан превращает мост и в интегральные формулы — площади под кривыми, которые позволяют вычислять величину другими путями. А ещё он подставляет его в известный рецепт для логарифма факториала, поправочные члены которого — снова числа Бернулли. С таким рецептом целую часть любого числа Бернулли можно оценить, а оставшаяся дробь получается из правила простых чисел, так что точное значение следует. Подвох, о котором он говорит открыто, в том, что для этого нужны логарифмы с большим числом знаков, чем давали

печатные таблицы его времени, и он обещает обходной путь позже.

Затем он берётся доказывать собственные закономерности, и стратегия изящна. Он собирает несколько бесконечных сумм, построенных из тех же обратных квадратов и из одного члена на каждое простое число, и утверждает, что некоторое их сочетание можно переписать, используя в качестве коэффициентов только целые числа. Будь это единственное утверждение верным, его правила о дробных остатках и одинаковых знаменателях следовали бы сразу, а два похожих утверждения дали бы его закономерности с нечётностью. Это как свести целую серию судебных дел к одной ключевой улике: докажи её — и всё остальное следует. Первые несколько коэффициентов, которые он может проверить вручную, и правда выходят целыми, и это обнадеживает.



Одна ключевая улика

Но ключевая улика так и не предъявлена. Каждый довод кончается словами «если мы сможем доказать», и он так и не доказывает. Редакторы собрания его статей указывают, что эти утверждения остаются недоказанными и что некоторые шаги используют суммы, которые не сходятся к определённом значению, так что доводы — лишь наброски. Правила, к которым он стремился, тем не менее верны: их раньше доказали Клаузен и фон Штаудт, а также Эйлер.

Для изучающего это ценный урок чтения математики. Верный ответ — не то же самое, что верное рассуждение, а многообещающий план — ещё не доказательство. Рамануджан в двадцать три года уже великолепно находил верные

утверждения; строгие доказательства он освоит позже, работая с Харди в Кембридже.

Запомним

Грубые пределы для числа Бернулли вместе с точными уликами о его оставшейся дроби и о простых в его верху сужают кандидатов до двух; Рамануджан выбирает верного, но по ложной улике. Классический мост связывает каждое число Бернулли с факториалом, степенью двух пи и суммой по всем целым числам, что объясняет их взрывной рост и даёт их величину через точные логарифмы. Его план доказательства сводит закономерности к одному утверждению о целых коэффициентах — утверждению, которого он так и не доказывает, хотя сами закономерности — верные теоремы, найденные раньше другими.

Вопросы

1. Почему несколько улик вместе сужают круг кандидатов гораздо сильнее, чем любая одна?
 - a. Каждая улика отсекает большую часть того, что оставляют другие, так что выживают лишь два кандидата
 - b. Потому что одной улики всегда достаточно
 - c. Потому что улики повторяют друг друга
 - d. Потому что диапазон с самого начала был крошечным

2. Что не так с последней уликой, по которой Рамануджан выбирает из двух кандидатов?
- a. Она опирается на его догадку, что верх, делённый на простое, сам прост, а для выбранного числа это ложно
 - b. Она выбирает не то число
 - c. Она не учитывает оставшуюся дробь
 - d. Для неё нужен калькулятор
3. Почему, согласно классическому мосту, числа Бернулли растут так взрывно?
- a. Каждое из них — по сути факториал против степени двух пи
 - b. Их знаменатели уменьшаются
 - c. Они удваиваются на каждом шаге
 - d. Это квадраты простых чисел
4. Каков статус плана доказательства Рамануджана?
- a. Он сводит всё к одному утверждению о целых коэффициентах, которого он так и не доказывает
 - b. Это полное доказательство
 - c. Он опровергнут
 - d. Он доказывает догадку о простом верхе

Ответы

1. a) Как улики сыщика, каждая по отдельности оставляет много возможностей, но вместе оставшаяся дробь, простое в верху и правило остатков оставляют лишь две.

- 2. а)** Улика ненадёжна: у выбранного им числа верх после деления тоже не простой, хотя само число верное.
- 3. а)** При больших номерах сумма едва превышает единицу, так что величина — это по сути факториал против степени двух пи.
- 4. а)** Каждый довод кончается словами «если мы сможем доказать», а ключевое утверждение так и не предъявлено; редакторы на это указывают.

Задачи

- 1.** Объясните своими словами на примере выбора одиннадцатого числа Бернулли, почему верный ответ не гарантирует верного рассуждения.

Подсказка: Подумайте об улике, по которой он решал.

Ответ: Он выбрал верное значение, но приведённая причина — что верх, делённый на одиннадцать, прост — для этого самого числа ложна. Так что ответ оказался верным отчасти по везению; рассуждение верно, только если верен каждый его шаг.

- 2.** Чем полезно, что сумму по всем целым числам можно записать и с одним множителем на каждое простое число?

Подсказка: Подумайте, что числа Бернулли, похоже, «знают» о простых числах.

Ответ: Это показывает, что простые числа встроены в числа Бернулли с самого начала, что помогает объяснить, почему их знаменателями и дробными частями управляют простые, и связывает эти числа с изучением простых чисел.

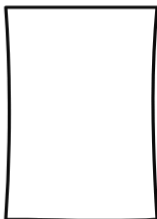
Измеряем великанов издалека

Астрономы могут сказать, как далеко звезда и насколько ярко она светит на самом деле, ни разу туда не слетав. Рамануджан делает нечто похожее с числами Бернулли, которые слишком велики, чтобы их выписать: он измеряет их издалека.

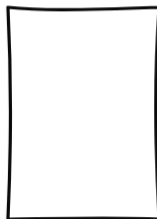
$$B_n \approx \frac{2n!}{(2\pi)^n}$$

LOG → ЧИСЛО ЦИФР

ТАБЛИЦА: 529,12



РЕЦЕПТ: 529,12



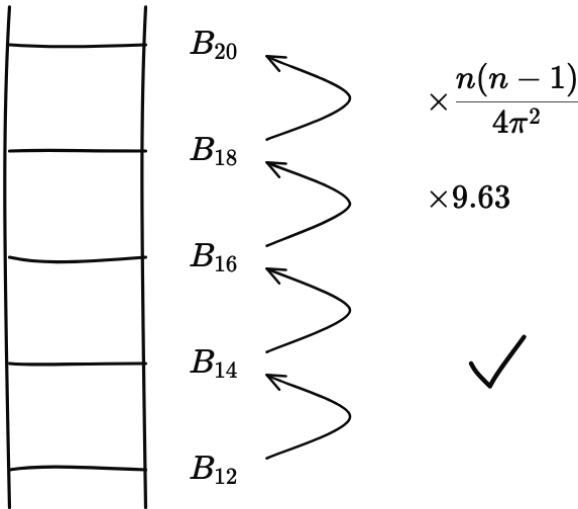
Измерено издалека

Его первый инструмент — формула для количества цифр. Она вырастает из моста, который мы встречали раньше и который связывает каждое число Бернулли с факториалом и степенью двух пи. Логарифмируя — а логарифм и есть инструмент для

измерения огромных чисел, — он превращает этот мост в короткий рецепт, которому нужны лишь номер и две постоянные. По нему он может сказать, сколько цифр у числа Бернулли и каковы его первые цифры, и даже указывает, насколько велика небольшая ошибка рецепта. Для десятого числа его таблицы рецепт попадает почти точно в истинное значение — около пятисот двадцати девяти.

Его второй инструмент сравнивает соседей. Оказывается, каждое число Бернулли очень близко к числу на два места раньше, умноженному на простой множитель из номера и пи. По мере роста чисел это приближение очень быстро становится превосходным. Это даёт лестницу: с одной ступени можно оценить следующую достаточно хорошо, чтобы знать, между какими двумя целыми числами она лежит. А раз оставшаяся дробь уже известна из правила простых, знания этих двух целых чисел хватает, чтобы записать точное значение. Рамануджан так поднимается по первым десяти ступеням, и каждое значение совпадает с его таблицей.

ЦЕЛОЕ + ИЗВЕСТНАЯ ДРОБЬ



Лестница соседей

Затем он щеголяет великаном — числом Бернулли с номером четыреста сорок четыре. Его оставшаяся дробь получается из правила простых, со знаменателем около девяноста миллионов. Рецепт для цифр говорит, что в его целой части шестьсот тридцать одна цифра, и называет первые четыре; если добавить величину знаменателя, в полном вершу дроби шестьсот тридцать девять цифр, и снова он знает, как он начинается. Пользуясь своими правилами остатков, он даже выясняет, чем кончаются целая часть и верх. Современные программы подтверждают эти цифры, хотя один шаг его рассуждения опирается на ненадёжную догадку о простом числе.

$$B_{444}$$

ЦЕЛОЕ: 631 ЦИФРА, 1751...

ВЕРХ: 639 ЦИФР, 1588...

...657

НИЗ: 90709710

ЕЩЁ: TG, COSEC

ВЕЛИЧИНА ПО LOG

$$\frac{B_n}{B_{n-2}} \approx \frac{n(n-1)}{4\pi^2}$$

Великан: В с номером 444

Наконец, он указывает, что всё, что он построил на котангенсе, можно перестроить на тангенсе или косекансе — двух других функциях из школьной тригонометрии. Это даёт новые тождества, связывающие числа Бернулли через несколько мест друг от друга, теперь с примешанными степенями двойки, и пополняет его набор коротких путей.

Запомним

С помощью логарифмов Рамануджан превращает мост к факториалам в рецепт для количества цифр и первых цифр любого числа Бернулли. Каждое число Бернулли очень близко к числу на два места раньше, умноженному на простой множитель, так что он может подниматься по таблице и устанавливать точные значения с помощью правила простых. Он описывает число с номером четырехста сорок четыре — его длину, первые и последние цифры, — не выписывая его, и распространяет свои тождества на тангенс и косеканс.

Вопросы

1. Что позволяет Рамануджану его рецепт для цифр?
 - a. Сказать по одному номеру, сколько цифр у числа Бернулли и каковы его первые цифры
 - b. Найти точный числитель любого числа Бернулли
 - c. Доказать, что числители простые
 - d. Вычислить π
2. Почему знания, между какими двумя целыми числами лежит число Бернулли, хватает для его точного значения?
 - a. Потому что оставшаяся дробь уже известна из правила простых
 - b. Потому что числа Бернулли — целые

- c. Потому что эти два числа всегда равны
 - d. Потому что лестница точна
3. Что он расширяет в конце этого отрезка?
- a. Свои тождества, перестроенные на тангенсе и косекансе
 - b. Свою таблицу до ста чисел
 - c. Своё доказательство догадки о простых
 - d. Свой рецепт для цифр на нечётные номера

Ответы

1. а) По нему он может сказать, сколько цифр у числа Бернулли и каковы его первые цифры.
2. а) Раз оставшаяся дробь уже известна из правила простых, знания этих двух целых чисел хватает, чтобы записать точное значение.
3. а) Он указывает, что всё построенное на котангенсе можно перестроить на тангенсе или косекансе, и получает новые тождества.

Задачи

1. Объясните на своём примере, как число можно подробно описать, не выписывая его.

Подсказка: Подумайте об измерении того, до чего нельзя дотянуться.

Ответ: Как высоту горы оценивают по её тени, так и о числе можно узнать величину, первые и последние цифры по косвенным уликам: логарифм даёт его длину и первые цифры, а правила делимости — то, чем оно кончается, и всё это без выписывания всех цифр.

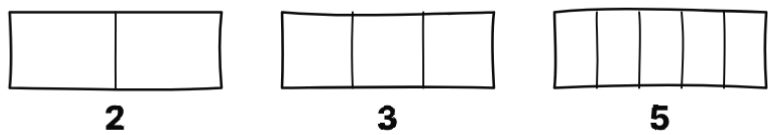
2. Почему лестница соседей работает для больших чисел Бернулли лучше, чем для малых?

Подсказка: Подумайте о поправочных множителях.

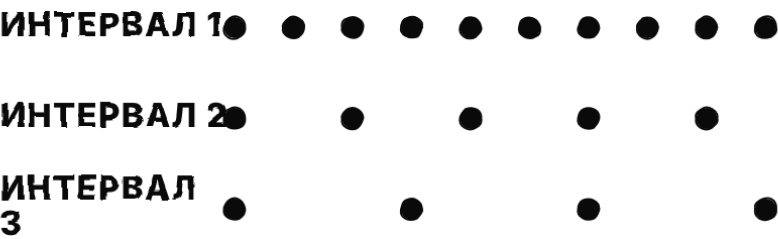
Ответ: Множитель соседа верен лишь приближённо, а поправка по мере роста чисел становится крайне малой, так что при больших номерах оценка каждый раз достаточно близка, чтобы выбрать верную пару целых чисел.

Сита всё мельче — и честный вердикт

Если вам когда-нибудь доводилось сортировать монеты набором сит, вы знаете мысль: крупное сито делит кучу надвое, более мелкое — натрое, и так далее, пока в каждом лотке не останутся монеты одного рода. Статья Рамануджана всё это время делала именно это с числами Бернулли. В её последних параграфах он даёт методу имя и показывает, как далеко тот простирается.



$$B_2, B_4, B_6, B_8, \dots$$



$$\omega^p = 1 \text{ (or } \omega^p = i) \longrightarrow \cot$$

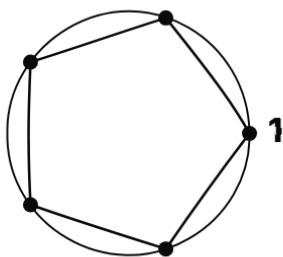
Сита всех размеров

Свои прежние результаты он называет формулами с интервалом один, два и три — по тому, как далеко друг от друга стоят числа

Бернулли, выжившие в каждой нити. Общий рецепт краток: чтобы получить формулу с интервалом p , возьмите числа, p -я степень которых равна единице, а при чётном p — мнимой единице, и подмешайте их в котангенс. Тогда большинство членов сокращается, и каждая нить сохраняет лишь числа Бернулли, стоящие всё дальше друг от друга, так что каждое новое зависит от всё меньшего числа прежних.

Чтобы показать рецепт в деле, он проводит случай с интервалом пять. Пять корней пятой степени из единицы сидят в вершинах правильного пятиугольника, а пятиугольник приводит с собой золотое сечение — число около одной целой шестисот восемнадцати тысячных, знаменитое по подсолнухам, ракушкам и числам Фибоначчи. Его формулы используют последовательность целых чисел, построенную из золотого сечения, — близких родственников чисел Фибоначчи, — и каждая формула сохраняет лишь каждое десятое число Бернулли. Затем он набрасывает случай с интервалом четыре, построенный на этот раз на квадратном корне из двух, и замечает, что тот же приём с косинусами даёт множество других тождеств. Для нас урок — в методе: одна мысль, гашение членов с помощью корней из единицы, порождает целое семейство коротких путей — так один удачный приём в программе может ускорить множество разных вычислений.

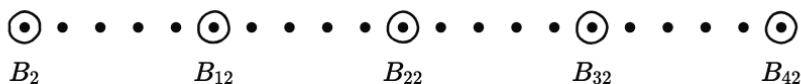
ИНТЕРВАЛ 5



$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

1, 3, 4, 7, 11, ...

four-interval: $\sqrt{2}$



ОДИН ПРИЁМ — МНОГО ПУТЕЙ

Пятиугольник и фи

Книга завершает статью заметкой редакторов собрания статей Рамануджана, написанной после его смерти. Это уважительный, но откровенный вердикт. Статья, говорят они, интересна как образец самой ранней манеры Рамануджана, но её главные результаты уже были известны, а доказательства неполны. Его правило для оставшихся дробей — это теорема Клаузена и фон Штаудта, а закономерность с нечётностью была известна Эйлеру.

РЕДАКТОРЫ

ИТОГИ ИЗВЕСТНЫ, ДОКАЗ. НЕПОЛНЫ КЛАУЗЕН — ШТАУДТ, ЭЙЛЕР

		ГИПОТЕЗА
НАБРОСОК	● ● ● ?	● ✓ ЗНАМЕН.
СЛЕДУЕТ	● ●	● ✗ ПРОСТЫЕ ВЕРХИ
		●

РЯДЫ РАСХОДЯТСЯ

Вердикт редакторов

Они также раскладывают его восемь арифметических утверждений по статусу — ровно то различие, которое этот курс старался соблюдать. Для трёх из них он наметил доказательства, но эти доказательства опираются на утверждения о целых коэффициентах, которых он так и не доказал. Ещё два он представил как следствия других. А три, включая утверждение, что верхи дробей простые, и его правило для знаменателей, он высказал лишь как гипотезы; правило для знаменателей на самом деле верно, а утверждение о простых — ложно. Редакторы добавляют, что некоторые его выводы используют бесконечные суммы, которые не сходятся к определённому значению, так что эти доводы в написанном виде не работают.

Зачем читать такую статью сегодня? Затем, что это редкий взгляд на великий ум до того, как его выучили: молодой человек, работающий в одиночку в Мадрасе, заново открывает знаменитую теорему, изобретает быстрые способы вычисления и угадывает закономерности по данным с верным чутьём на то, какие из них важны. Через несколько лет, работая с Харди в Кембридже, Рамануджан научился подкреплять свои прозрения строгими доказательствами, и его поздние работы перестроили части теории чисел. Этот курс прошёл за его первой опубликованной статьёй от котангенса до вердикта редакторов и на этом заканчивается.

ЗАЧЕМ ЧИТАТЬ?

**ОТКРЫТЬ ЗАНОВО
БЫСТРЫЙ СЧЁТ**

УГАДЫВАТЬ

СТРОГИЕ ДОКАЗ.

МАДРАС, 1911

**КЕМБРИДЖ
ХАРДИ**

**КОРНИ ИЗ 1 → ТОНЬШЕ НИТИ
ИТОГИ ИЗВЕСТНЫ, ДОКАЗ. НЕПОЛНЫ
ЗНАМЕНАТЕЛИ ✓ ПРОСТЫЕ ВЕРХИ ×**

От Мадраса до Кембриджа

Запомним

Рамануджан называет свой метод формулами с интервалом и показывает общий рецепт: корни из единицы, подмешанные в котангенс, разбирают числа Бернулли на всё более тонкие нити, а в случае с интервалом пять появляется золотое сечение. Итоговая заметка редакторов говорит, что главные результаты статьи уже были известны, а доказательства неполны, и разделяет его утверждения на доказательства, опирающиеся на недоказанные утверждения, следствия и просто гипотезы. Одни гипотезы верны, как правило для знаменателей, а одна ложна — утверждение о простых верхах; статья остаётся живым портретом самой ранней манеры работы Рамануджана.

Вопросы

1. Каков общий рецепт формулы с интервалом p ?
 - a. Подмешать в котангенс числа, p -я степень которых равна единице, а при чётном p — мнимой единице
 - b. Умножить котангенс на p
 - c. Взять первые p простых чисел
 - d. Разделить таблицу на p частей
2. Что приводит в формулы с интервалом пять пятиугольник из корней пятой степени?
 - a. Золотое сечение

- b. Число e
 - c. Квадратный корень из двух
 - d. Только число π
3. Как редакторы раскладывают восемь арифметических утверждений Рамануджана?
- a. Три с намеченными доказательствами, опирающимися на недоказанное, два следствия и три гипотезы
 - b. Все восемь полностью доказаны
 - c. Все восемь ложны
 - d. Четыре доказаны и четыре ложны

Ответы

1. **a)** Чтобы получить формулу с интервалом π , возьмите числа, π -я степень которых равна единице, а при чётном π — мнимой единице, и подмешайте их в котангенс.
2. **a)** Пять корней пятой степени из единицы сидят в вершинах правильного пятиугольника, а пятиугольник приводит с собой золотое сечение.
3. **a)** Для трёх он наметил доказательства, опирающиеся на недоказанные утверждения, два представил как следствия, а три высказал лишь как гипотезы.

Задачи

1. Объясните своими словами, почему более мелкие сита означают меньше работы для каждого нового числа Бернулли.

Подсказка: Подумайте, сколько прежних чисел сидит в той же нити.

Ответ: Более мелкое сито раскладывает числа Бернулли на большее число нитей, в каждой из которых члены стоят дальше друг от друга. Каждое новое число вычисляется лишь по прежним членам своей нити, так что чем мельче сито, тем меньше прежних чисел нужно каждому шагу.

2. На примере заметки редакторов объясните разницу между гипотезой, следствием и доказательством, опирающимся на недоказанное утверждение.

Подсказка: Подумайте, чего каждому из них ещё не хватает.

Ответ: Гипотеза — это догадка, высказанная без доказательства; следствие вытекает из другого утверждения, так что надёжно ровно настолько, насколько надёжно оно; доказательство, опирающееся на недоказанное утверждение, полно, кроме этого утверждения. Редакторы пользуются этими категориями, чтобы показать: ни одно из восьми утверждений Рамануджана в статье полностью не доказано, хотя несколько из них — верные теоремы.