

Собрание статей Сринивасы Рамануджана



Srinivasa Ramanujan · 1927

Иллюстрированные аудиолекции

Lecturized

Собрание статей Сринивасы Рамануджана

Иллюстрированные аудиолекции

Srinivasa Ramanujan · 1927

Пересказано в иллюстрированных лекциях Lecturized
lecturized.com

По оригиналу: Collected Papers of Srinivasa Ramanujan, ed. G. H. Hardy, P. V. Seshu
Aiyar and B. M. Wilson (Cambridge, 1927)

Содержание

Где живут числа Бернулли

Ещё быстрее — и первая таблица

Читаем законы по образцам

От грубой величины к точному значению — и открытые доказательства

Насколько велико и чем кончается

Общая закономерность и что сказали редакторы

Где живут числа Бернулли

Некоторые числа появляются в математике повсюду, куда ни посмотри, и числа Бернулли — одни из самых настойчивых. Они возникают, когда складывают квадраты или кубы целых чисел, когда оценивают огромные факториалы и когда изучают простые числа. Первые из них — дружелюбные дроби, одна шестая, одна тридцатая, одна сорок вторая, но вскоре они дичают, и их числители растягиваются на десятки цифр. В 1911 году молодой конторский служащий из Мадраса, Рамануджан, опубликовал о них свою самую первую статью, и этот курс идёт по ней.



$$\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{30}$$

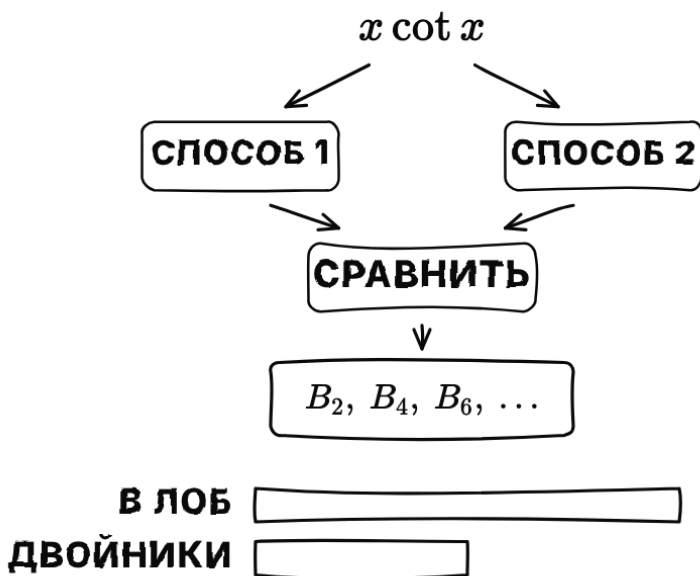
$$\frac{1}{42}$$

...

Где они появляются

Статья задаёт два вопроса. Как вычислять эти числа с наименьшими усилиями? И каким скрытым закономерностям они подчиняются — в числителях, в знаменателях и по величине? Первые параграфы посвящены первому вопросу, и весь ответ держится на одной мысли: все эти числа содержатся в одной знакомой функции.

Эта функция — котангенс из школьной тригонометрии, умноженный на угол. Если расписать её вблизи нуля как длинную сумму степеней, её члены один за другим несут в себе числа Бернулли; Рамануджан берёт их все положительными, а нулевое называет минус единицей, чтобы вписался первый член. Если эту функцию удаётся описать двумя разными способами, два описания должны совпадать член за членом, и каждое такое совпадение — уравнение, которое даёт следующее число Бернулли. Это и есть мотор статьи: записать одно и то же дважды, сравнить и прочесть числа.



Записать дважды, сравнить

Если делать это в лоб, мотор работает медленно. Первым уравнениям, которые он получает, нужны все прежние числа Бернулли, чтобы выдать следующее, так что работа по ходу неуклонно растёт. Его улучшение — соединить котангенс с его двойником, так что каждый второй член сокращается, и каждую половину семейства можно разбирать отдельно. Новым уравнениям нужно вдвое меньше прежних чисел, а следующая часть курса развивает тот же приём дальше.

Почему это важно не только в 1911 году? Выбор сочетания, которое убирает большую часть работы, — тот же инстинкт, что стоит за быстрыми формулами внутри калькулятора или системы компьютерной алгебры, которые сегодня вычисляют эти

числа за доли секунды. А значения, которые Рамануджан получил таким путём, и привели его к закономерностям в следующих параграфах — одни из них оказались верными и знаменитыми, а другие проверки не выдержали. Здесь опущены сами уравнения, три способа записать котангенс, соотношение с квадратом ряда и подробности о функции-двойнике; они есть в первых трёх параграфах статьи.

Запомним

Числа Бернулли — особые дроби, которые встречаются по всей математике, и все они живут внутри котангенса, умноженного на угол. Метод Рамануджана — описать эту функцию двумя способами и сравнить член за членом, что выдаёт числа одно за другим. Простому сравнению на каждом шаге нужны все прежние числа; пара котангенса с двойником, при которой половина членов сокращается, сокращает эту работу вдвое. Этот поиск коротких путей и полученные им значения подготовили закономерности, о которых говорит остальная часть статьи.

Вопросы

1. На какой единственной мысли держатся первые параграфы статьи?
 - а. Что все числа Бернулли простые

- b. Что одна знакомая функция, котангенс, умноженный на угол, содержит все числа Бернулли
 - c. Что числа Бернулли можно угадать по таблице
 - d. Что для их нахождения нужен компьютер
2. Почему описание функции двумя способами выдаёт числа?
- a. Потому что два описания должны совпадать член за членом, и каждое совпадение — уравнение
 - b. Потому что два описания дают два разных числа, которые надо усреднить
 - c. Потому что одно описание всегда проще
 - d. Потому что котангенс повторяет сам себя
3. Чего достигает пара котангенса с его двойником?
- a. Все числа становятся целыми
 - b. Каждый второй член сокращается, так что каждую половину семейства можно разбирать с меньшим числом прежних чисел
 - c. Работа удваивается, зато растёт точность
 - d. Это доказывает все закономерности следующих параграфов

Ответы

1. **b)** Весь ответ держится на одной мысли: одна знакомая функция, котангенс, умноженный на угол, содержит их все.

2. **a)** Если описать функцию двумя способами, описания должны совпадать член за членом, и каждое совпадение — уравнение, дающее следующее число.

3. б) Соединение котангенса с двойником сокращает каждый второй член, и новым уравнениям нужно вдвое меньше прежних чисел.

Задачи

1. Объясните своими словами, почему запись одного и того же дважды и сравнение могут дать новые сведения.

Подсказка: Подумайте о двух описаниях одного предмета, которые обязаны совпадать во всех подробностях.

Ответ: Если два выражения описывают одну и ту же функцию, каждый кусочек одного должен равняться соответствующему кусочку другого. Каждое такое совпадение — уравнение, и если в одной части стоит неизвестное число Бернулли, а в другой только известные величины, уравнение сообщает это неизвестное. Повторяя это, получаешь числа одно за другим.

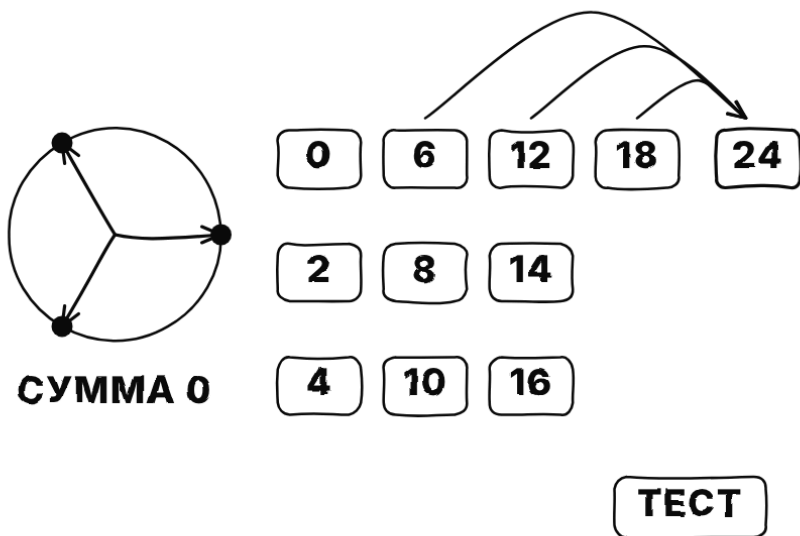
2. Почему Рамануджану было важно, чтобы для следующего числа требовалось меньше прежних?

Подсказка: Вспомните, что он считал вручную и что числа быстро растут.

Ответ: Каждое прежнее число приходится вносить в вычисление, а у чисел скоро появляются длинные числители, так что каждый член стоит настоящего труда вручную. Если нужных членов вдвое меньше, вдвое меньше и работы, и меньше шансов ошибиться в арифметике, а это важно, когда нужны значения далеко в последовательности.

Ещё быстрее — и первая таблица

В прошлой части Рамануджан соединил котангенс с двойником, так что половина его членов сократилась. Теперь он задаёт естественный следующий вопрос: если два партнёра сокращают половину членов, не сократят ли три ещё больше? Ответ — да, и это даёт ему ещё более быстрый рецепт, а заодно готовый способ проверять собственную арифметику.



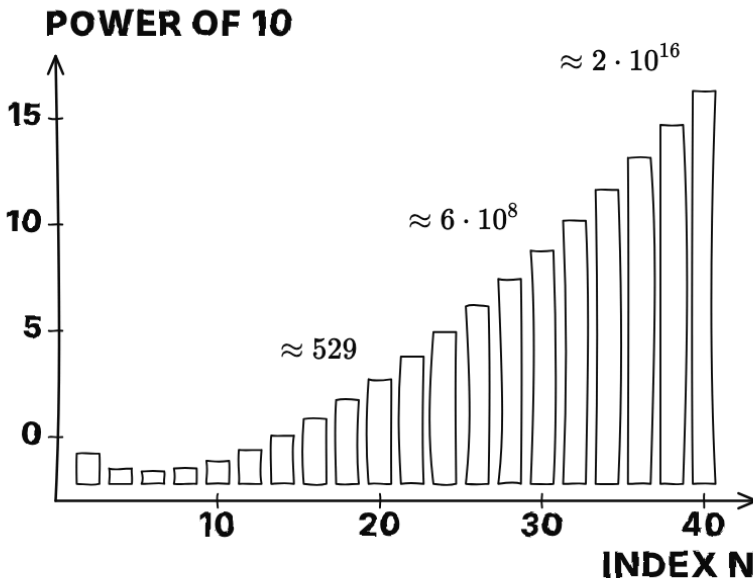
Три партнёра — треть работы

Три партнёра происходят из кубических корней из единицы: сама единица и два комплексных числа, сидящих на окружности

на треть оборота друг от друга. Как три равные тяги на кольцо под равными углами, эти три числа в сумме дают ноль. Если подать все три в котангенс и сложить результаты, сократятся два члена из каждых трёх. Остаётся нить чисел Бернулли через шесть мест друг от друга, а сдвигая смесь, он получает все три нити, каждую со своим простым отношением двух рядов.

Награда — рекуррентная формула, его двенадцатый результат, в которой каждому новому числу Бернулли нужна лишь треть прежних чисел, требовавшихся простому способу первого параграфа. Чтобы найти, например, двадцать четвёртое, ему нужны только восемнадцатое, двенадцатое и шестое. Второе соотношение, построенное из произведений пар этих чисел, приводит к тем же значениям другой дорогой, и Рамануджан прямо говорит, что оно нужно для проверки вычислений. Каждый, кто складывал длинный столбец дважды — один раз снизу вверх, другой сверху вниз, — знает, почему это важно.

С этим механизмом он вычисляет первые двадцать чисел Бернулли и выписывает их. Они начинаются кротко — одна шестая, одна тридцатая, одна сорок вторая, затем снова одна тридцатая, — но вскоре круто идут вверх. Число с номером двадцать — около пятисот двадцати девяти, с номером тридцать — около шестисот миллионов, а с номером сорок — около девятнадцати тысяч миллионов миллионов. Их знаменатели остаются скромными, а числители растягиваются на двадцать и больше цифр, и таблица кончается замечанием, что они растут без границ.



Сначала малые, потом огромные

Почему эта таблица важна? Потому что Рамануджан не остановился на вычислениях. Он смотрел на эти значения так, как натуралист смотрит на образцы, ища закономерности: какие простые числа делят числители, какие — знаменатели и как ведут себя дробные части. Следующая часть курса — об этих закономерностях, а таблица здесь — свидетельство, из которого он их вывел. Сегодня система компьютерной алгебры выдаёт ту же таблицу мгновенно, но Рамануджан получил её вручную — именно поэтому скорость его рекуррентной формулы так много значила.

Здесь опущены тригонометрические тождества с кубическими корнями, сами три формулы с отношениями, точный вид

рекуррентной формулы и проверочного соотношения и промежуточные уравнения, которые он решал одно за другим; всё это есть в параграфах четвёртом и пятом статьи.

Запомним

Три кубических корня из единицы в сумме дают ноль, и если подмешать их в котангенс, сокращаются два члена из каждых трёх, оставляя нити чисел Бернулли через шесть мест. Это даёт Рамануджану более быструю рекуррентную формулу, которой нужна лишь треть прежних чисел, вместе с отдельным соотношением из произведений для проверки. С её помощью он составляет таблицу первых двадцати чисел Бернулли, которые начинаются маленькими дробями, а потом становятся огромными. Эта таблица — сырьё для закономерностей, которые он формулирует дальше.

Вопросы

1. Почему подмешивание трёх кубических корней из единицы в котангенс сокращает два члена из каждых трёх?
 - a. Потому что три числа в сумме дают ноль, как три равные тяги на кольцо
 - b. Потому что каждый кубический корень равен нулю
 - c. Потому что в котангенсе есть лишь каждый третий член
 - d. Потому что все кубические корни равны

2. Для чего служит второе соотношение, построенное из произведений пар?
- a. Чтобы вычислять числа быстрее рекуррентной формулы
 - b. Чтобы проверять арифметику: оно приводит к тем же значениям другой дорогой
 - c. Чтобы доказать, что числа простые
 - d. Чтобы найти знаменатели
3. Почему таблица из двадцати значений важна для остальной статьи?
- a. Это свидетельство, по которому Рамануджан прочитывает свои закономерности
 - b. Она доказывает все его последующие утверждения
 - c. Она делает любые формулы ненужными
 - d. Она показывает, что числа остаются маленькими

Ответы

1. **a)** Как три равные тяги на кольцо под равными углами, три числа в сумме дают ноль, так что подача всех трёх в котангенс сокращает два члена из каждых трёх.
2. **b)** Оно даёт те же значения другой дорогой, и Рамануджан говорит, что оно нужно для проверки вычислений.
3. **a)** Рамануджан смотрел на эти значения как на образцы натуралиста, и таблица — свидетельство для последующих закономерностей.

Задачи

1. Объясните своими словами, чем ценно отдельное проверочное соотношение при вычислениях вручную.

Подсказка: Подумайте о длинном столбце, сложенном дважды.

Ответ: Вручную одна-единственная ошибка в длинном вычислении остаётся незамеченной и портит все последующие значения, которые от него зависят. Вторая формула, приводящая к тем же числам другой дорогой, ловит такие ошибки: если обе дают одну и ту же дробь, ошибка очень маловероятна.

2. Таблица показывает маленькие знаменатели и быстро растущие числители. Что из этого подсказывает математику, куда смотреть дальше?

Подсказка: Подумайте, что можно сказать о числителе и знаменателе каждой дроби по отдельности.

Ответ: Это подсказывает изучать две части по отдельности: какие простые числа всегда встречаются в маленьких знаменателях и что можно сказать об огромных числителях. Именно туда Рамануджан и поворачивает дальше, ища правила, связывающие номер с простыми числами в числителе и знаменателе.

Читаем законы по образцам

Держа в руках таблицу из двадцати чисел Бернулли, Рамануджан делает то же, что натуралист с ящиком образцов: ищет правила.

У этих дробей две очень разные половины. Их низы, знаменатели, маленькие и аккуратные; их верхи, числители, огромные и выглядят случайными. Поэтому он задаёт два вопроса: что определяет знаменатель и что можно сказать о числителе?

$$\frac{\text{ОГРОМНЫЙ}}{\text{МАЛЫЙ}}$$

	1	2	3	4	6	8	12	24
↓ +1	2	3	~~4~~	5	7	~~9~~	13	~~25~~

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 2730$$

Правило для низов

Для знаменателей он находит правило поразительной простоты. Возьмите каждое число, которое делит номер, прибавьте к каждому единицу, оставьте только простые результаты и перемножьте их: это произведение и есть знаменатель. Для номера двадцать четыре получается две тысячи семьсот тридцать — ровно то число, что стоит в таблице. Близкий родственник этого правила говорит, что часть каждого числа Бернулли после его целой части составлена из единиц, делённых на каждое из этих простых, сложенных вместе, минус единица. А отсюда следует, что когда у двух чисел Бернулли один и тот же знаменатель, их разность или сумма, смотря по паре, — целое число. Эти правила для знаменателей верны: это знаменитая теорема, найденная Клаузенем и фон Штаудтом на десятилетия раньше, а Рамануджан открыл её заново сам.

ЗНАМЕНАТЕЛИ

$$\sum \frac{1}{p} - 1$$



ТЕОРЕМА

ЧИСЛИТЕЛИ

ПРОСТОЙ?

174611

283

617

ГИПОТЕЗА

Верное правило, неудачная догадка

С числителями он смелее. Он замечает, что после деления на номер числитель, похоже, всегда простой и что простое число, делящее номер, которого нет в знаменателе, должно вместо этого появиться в числителе. Он замечает и то, что некоторые сочетания числа Бернулли со степенями двойки всегда дают нечётные целые числа, а некоторые всегда дают в остатке единицу при делении на тридцать. Закономерность с нечётностью была известна ещё Эйлеру. Но утверждение о простом числителе проверки не выдерживает: для номера двадцать числитель, который он называет простым, равен двумстам восьмидесяти трём, умноженным на шестьсот семнадцать. Редакторы собрания его статей прямо говорят, что несколько этих утверждений были гипотезами и что

доказательства, которые он набрасывает позже, зависят от шагов, которых он так и не доказал.

Почему закономерности, выведенные из двадцати примеров, важны — верны они или нет? Потому что именно так во многом и движется математика: кто-то вглядывается в данные, угадывает правила, а другие потом их доказывают или опровергают. Догадки Рамануджана здесь смешивают повторные открытия настоящих теорем с несколькими полными надежды экстраполяциями — черта, которая отмечала его работу до конца его короткой жизни, — а верные из них используются по сей день, например когда системы компьютерной алгебры вычисляют числа Бернулли точно.

Здесь опущены точные формулировки с их номерами, разобранные примеры для отдельных номеров, таблица знаменателей и подробности правил делимости и остатков; всё это есть в параграфах шестом—девятом статьи.

Запомним

По своей таблице Рамануджан считывает правила для верхов и низов чисел Бернулли. Знаменатель — это произведение простых чисел, которые на единицу больше какого-либо делителя номера, а оставшаяся дробь построена из тех же простых; эти правила — верная теорема, которую он открыл заново. Его утверждения о числителях смелее: некоторые, вроде закономерностей с нечётностью, верны и известны, но утверждение, что числитель всегда простой, ложно, и редакторы отмечают несколько утверждений как гипотезы.

Вопросы

1. Какое правило находит Рамануджан для знаменателей чисел Бернулли?
 - a. Взять делители номера, прибавить единицу, оставить простые и перемножить
 - b. Они всегда степени двойки
 - c. Они равны номеру плюс один
 - d. Они случайны
2. Какая из его закономерностей оказалась верной и уже известной теоремой?
 - a. Что числитель всегда простой

- b. Правило для знаменателей, найденное Клаузенем и фон Штаудтом на десятилетия раньше
 - c. Что каждое число Бернулли — целое
 - d. Что числа уменьшаются
- 3. Что стало с утверждением, что числитель всегда простой?
 - a. Рамануджан его доказал
 - b. Оно ложно: для номера двадцать числитель равен двумстам восьмидесяти трём, умноженным на шестьсот семнадцать
 - c. Редакторы его подтвердили
 - d. Оно верно для всех номеров больше десяти

Ответы

- 1. a) Возьмите каждое число, которое делит номер, прибавьте к каждому единицу, оставьте только простые и перемножьте: это произведение и есть знаменатель.
- 2. b) Правила для знаменателей верны: это знаменитая теорема Клаузена и фон Штаудта, которую Рамануджан открыл заново.
- 3. b) Утверждение о простом числителе проверки не выдерживает: для номера двадцать числитель, который он называет простым, равен двумстам восьмидесяти трём, умноженным на шестьсот семнадцать.

Задачи

- 1. Объясните своими словами, почему угадывать правила по таблице примеров полезно, даже когда часть догадок ошибочна.

Подсказка: Подумайте, что происходит с догадкой после того, как её записали.

Ответ: Высказанное правило могут проверить другие: если оно верно, кто-то его доказывает, и оно становится инструментом; если ложно, контрпример показывает, где именно оно ломается, и это тоже чему-то учит. Таблица Рамануджана дала и то и другое: верные теоремы вроде правила для знаменателей и утверждение о простом числителе, которое не выдерживает.

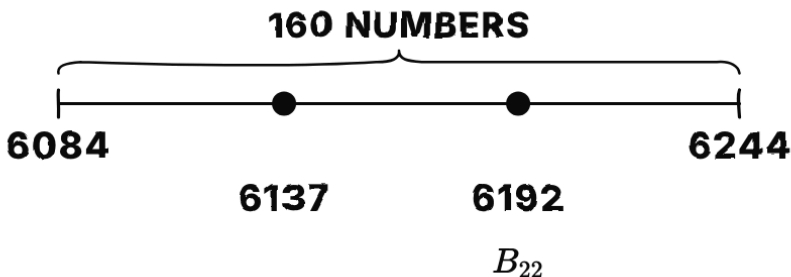
2. Почему важно, что знаменатели подчиняются простому правилу, а числители — нет?

Подсказка: Подумайте, как вычислить число Бернулли точно.

Ответ: Если знаменатель заранее известен по одному номеру, то точное вычисление числа Бернулли сводится к нахождению его числителя, а дробная часть тоже известна. Поэтому Рамануджан позже может установить точное значение по грубым границам его величины.

От грубой величины к точному значению — и открытые доказательства

Вот головоломка, которая передаёт этот отрезок статьи. Вам говорят, что дробь лежит где-то между шестью тысячами и шестью тысячами двумястами пятьюдесятью, называют её низ и сообщают пару фактов о её верхе. Можете ли вы назвать её точно? Рамануджан показывает, что для чисел Бернулли ответ часто — да, и здесь окупаются все его прежние закономерности.



ДОГАДКА ЛОЖНА

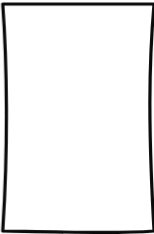
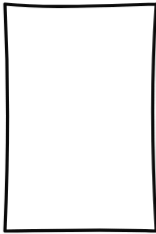
От диапазона к одному значению

Его разобранный пример — число Бернулли с номером двадцать два. Зная лишь грубые пределы его величины, он пользуется правилами из предыдущих параграфов: оставшаяся дробь после целой части определяется простыми числами знаменателя, одиннадцать должно делить верх, и должно выполняться правило остатков. Из ста шестидесяти целых чисел диапазона выживают лишь два кандидата, и он выбирает верного — значение из своей собственной таблицы. В том, как он выбирает, есть подвох: он опирается на догадку, что верх, делённый на одиннадцать, — простое число, а для этого самого числа догадка ложна. Так что сама мысль сочетать грубую величину с точными арифметическими фактами здрава и сильна, а вот один из фактов, на которые он опирается, — нет.

Следующий вопрос — откуда берётся грубая величина. Здесь Рамануджан привлекает классический мост между числами Бернулли и суммой единиц, делённых на каждое целое число в степени, — той самой суммой, что для квадратов даёт π в квадрате на шесть. Он говорит, что число Бернулли — это по сути факториал, делённый на степень двух π и умноженный на сумму, едва превышающую единицу. Поэтому величина числа Бернулли растёт как факториал, и это объясняет взрыв в таблице. Он превращает тот же факт и в интегральные формулы и подставляет его в классическое разложение логарифма факториала, поправочные члены которого сами являются числами Бернулли. При достаточном числе знаков в логарифмах это даёт целую часть любого числа Бернулли, а правило простых даёт дробную часть. Практическая трудность, о которой он честно говорит, в том, что в таблицах логарифмов его времени не

хватало знаков после запятой, — эту задачу он решает чуть позже.

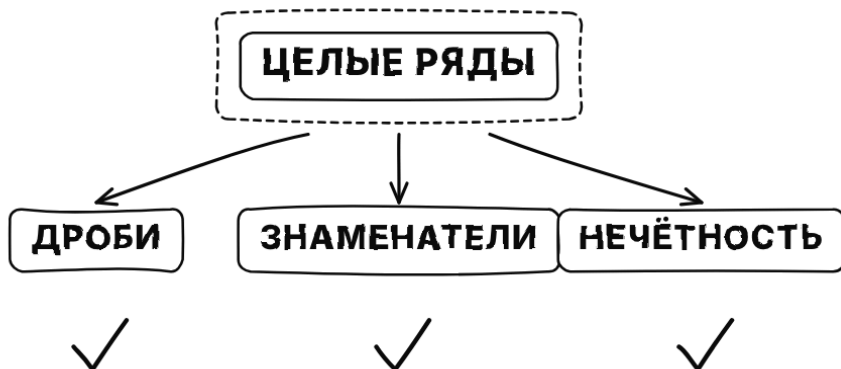
$$B_n \approx \frac{2n!}{(2\pi)^n} \times \left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots\right)$$

≈ 529.12	≈ 529.12
	
B_{20}	$\frac{2 \cdot 20!}{(2\pi)^{20}}$

Почему они растут как факториал

Затем он пытается доказать собственные закономерности. Его план — показать, что некоторые бесконечные суммы, построенные из единиц, делённых на квадраты сдвинутых целых чисел, и из простых чисел больше трёх, можно переписать в виде рядов, все коэффициенты которых — целые числа. Будь это так, правило для дробных частей и правило об одинаковых знаменателях следовали бы сразу, а с двумя похожими рядами — и закономерности с нечётностью. Это изящная стратегия: свести многие арифметические факты к одному утверждению о целых коэффициентах.

НЕ ДОКАЗАНО



КЛАУЗЕН, ШТАУДТ, ЭЙЛЕР

Одно недоказанное утверждение

Но само это утверждение в статье так и не доказано. Редакторы собрания статей указывают, что ключевые утверждения о рядах оставлены без доказательства и что в некоторых промежуточных шагах используются ряды, которые не сходятся, так что доводы в нынешнем виде неполны. Результаты, к которым он стремился, тем не менее верны и были известны до него: правило для дробных частей — это теорема Клаузена и фон Штаудта, а закономерность с нечётностью восходит к Эйлеру. Впечатляет то, что молодой человек, работая в одиночку, нашёл верные утверждения и правдоподобный путь к ним.

Здесь опущены сами интегральные формулы, разложение логарифма факториала с его остаточным членом и подробные

тождества с рядами из попытки доказательства; всё это есть в параграфах десятом—двенадцатом статьи.

Запомним

Грубые пределы для числа Бернулли вместе с точными фактами о его знаменателе и числителе позволяют установить его точное значение, хотя пример Рамануджана опирается на ложную догадку о простом числе.

Классическая формула связывает числа Бернулли с факториалами, степенями двух π и суммами обратных степеней, что объясняет их взрывной рост и даёт их целую часть через точные логарифмы. Его попытка доказать закономерности сводит их к одному утверждению о рядах с целыми коэффициентами — утверждению, которого он так и не доказывает; целевые результаты — верные теоремы, найденные раньше другими.

Вопросы

1. Как можно точно назвать число Бернулли, зная лишь грубые пределы его величины?
 - a. Сочетая пределы с точными фактами о его знаменателе и числителе
 - b. Угадав первую цифру
 - c. Измерив его калькулятором
 - d. Это невозможно

2. Почему числа Бернулли в таблице взрываются по величине?
- a. Потому что число Бернулли — это по сути факториал, делённый на степень двух пи
 - b. Потому что их знаменатели уменьшаются
 - c. Из-за ошибок округления
 - d. Потому что они каждый раз удваиваются
3. Каков статус попытки Рамануджана доказать свои закономерности?
- a. Завершена и принята
 - b. Неполна: она опирается на утверждение о целых коэффициентах, которого он так и не доказывает
 - c. Полностью опровергнута
 - d. Списана у Эйлера

Ответы

1. a) Зная грубые пределы, он пользуется правилами из предыдущих параграфов, и из ста шестидесяти кандидатов выживают лишь два.
2. a) Классический мост говорит, что число Бернулли — это по сути факториал, делённый на степень двух пи и умноженный на сумму, едва превышающую единицу, так что оно растёт как факториал.
3. b) Его план сводит закономерности к одному утверждению о рядах с целыми коэффициентами, а само это утверждение в статье так и не доказано.

Задачи

1. Объясните своими словами, почему сочетание грубой величины с точными арифметическими фактами так сильно.

Подсказка: Подумайте о замке, комбинацию которого вы знаете частично.

Ответ: Грубая величина ограничивает ответ диапазоном целых чисел, а каждый точный факт отсекает большинство чисел в этом диапазоне. Вместе они могут оставить единственную возможность — так знание нескольких цифр комбинации и суммы её цифр позволяет её определить, вовсе не вычисляя число напрямую.

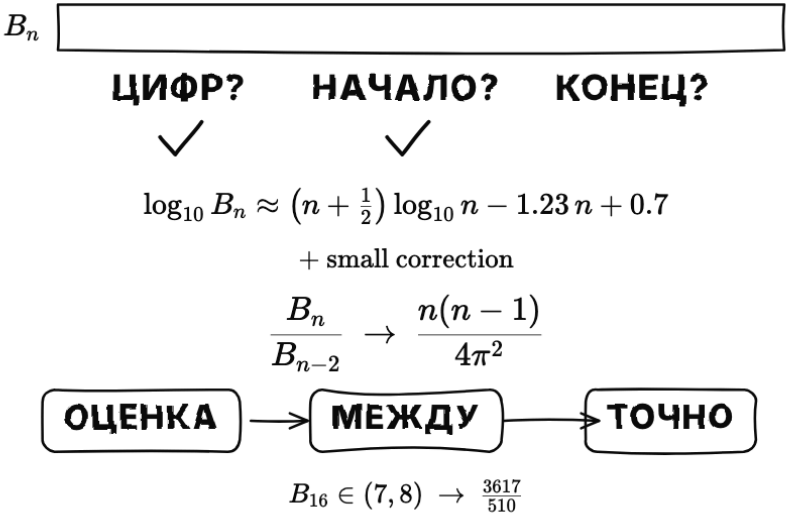
2. Почему сведение Рамануджаном многих закономерностей к одному утверждению всё же может быть ценным, хотя само утверждение он не доказал?

Подсказка: Подумайте, что нужно было бы сделать математику позже.

Ответ: Оно показывает, что именно требуется доказать: одно утверждение о целых коэффициентах вместо множества отдельных фактов. Тот, кто позже докажет это утверждение или найдёт другое доказательство результатов, знает, где лежит настоящая трудность, а результаты, к которым он стремился, оказались верными теоремами.

Насколько велико и чем кончается

Представьте, что вас спрашивают о числе настолько большом, что его запись заняла бы целую страницу. Вычислить его вы не можете, но всё же можете сказать, сколько в нём цифр, с чего оно начинается и даже чем кончается. В этом и состоит фокус этого отрезка статьи — применённый к числам Бернулли далеко за пределами таблицы Рамануджана.



Величина, затем отношение

Сначала величина. Из моста между числами Бернулли и факториалами Рамануджан выводит простую приближённую

формулу для количества цифр. Ей нужны лишь обычные логарифмы номера, пара постоянных и небольшая поправка, которую он тоже указывает. Так что для любого номера, сколь угодно большого, он может сказать, сколько цифр в целой части и каковы её первые цифры, не вычисляя само число.

Затем отношение. Сравнивая каждое число Бернулли с числом на два места раньше, он показывает, что их отношение очень быстро устанавливается на простом выражении из номера и π . Это даёт практичный способ подниматься по таблице: оценить следующее число по предыдущему, найти, между какими двумя целыми оно лежит, а затем прибавить оставшуюся дробь из правила простых и получить точное значение. Он показывает этот шаг за шагом для первых десяти чисел, каждое из которых получено из предыдущего.

Затем главный номер программы — число Бернулли с номером четырёхсот сорок четыре. В 1911 году выписать его вручную было невыносимо, и всё же Рамануджан подробно его описывает. Его оставшаяся дробь получается из правила простых; в его целой части шестьсот тридцать одна цифра, начинающаяся с единицы, семёрки, пятёрки и единицы; в его полном числителе шестьсот тридцать девять цифр, начинающихся с единицы, пятёрки, восьмёрки и восьмёрки. Пользуясь своими правилами остатков, он даже выясняет, чем кончаются целая часть и числитель. Это похоже на описание человека, которого вы никогда не видели, по его следам: рост, вес и походка — всё по косвенным уликам. Часть этого описания опирается на его недоказанную догадку о простом числителе, но оценки величины и дробная часть стоят на твёрдой почве.

B_{444}

НЕ ВЫПИСАТЬ

ЦЕЛОЕ: 631 ЦИФРА, 1751...

ВЕРХ: 639 ЦИФР, 1588...

...4 ?

...57 ?

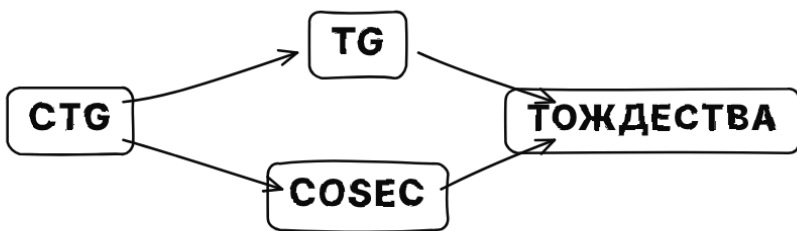
ДРОБЬ: ПРАВИЛО



КАК ПО СЛЕДАМ

Великан B444

Наконец, он отмечает, что всё сделанное с котангенсом можно повторить с тангенсом или косекансом, получив ещё больше тождеств между числами Бернулли — с другими шагами и другими степенями двойки.



ПОДРОБНО: § 13–16

ЦИФРЫ ПО LOG

$$\frac{B_n}{B_{n-2}} \approx \frac{n(n-1)}{4\pi^2}$$

B_{444} : length, start, end

За пределами котангенса

Здесь опущены формула для цифр с её постоянными, формула отношения с её произведением по простым, пошаговая таблица первых десяти чисел и явные тождества для тангенса и косеканса; всё это есть в параграфах тринадцатом–шестнадцатом статьи.

Запомним

Рамануджан даёт простую формулу того, сколько цифр у числа Бернулли и с чего оно начинается, — верную для любого номера. Отношение каждого числа Бернулли к числу на два места раньше быстро устанавливается на простом выражении с π , что позволяет ему подниматься по таблице и устанавливать каждое точное значение правилом простых. Затем он описывает число Бернулли с номером четыреста сорок четыре — количество его цифр, первые цифры и то, чем оно кончается, — ни разу его не выписав, и распространяет свои тождества на тангенс и косеканс.

Вопросы

1. Что формула Рамануджана для цифр может сказать о числе Бернулли, не вычисляя его?
 - a. Сколько цифр в его целой части и каковы его первые цифры
 - b. Его точный числитель
 - c. Простое ли оно
 - d. Только его последнюю цифру
2. Как правило отношения помогает подниматься по таблице?
 - a. Оценить следующее число по предыдущему, найти два целых, между которыми оно лежит, затем прибавить оставшуюся дробь из правила простых

- b. Умножать каждое число на два
 - c. Складывать два предыдущих числа
 - d. Каждый раз делить на π
3. Какая часть описания четырёхста сорок четвёртого числа Бернулли стоит на зыбкой почве?
- a. Та, что опирается на его недоказанную догадку о простом числителе
 - b. Количество цифр
 - c. Оставшаяся дробь
 - d. Первые цифры

Ответы

1. **a)** Для любого номера, сколь угодно большого, он может сказать, сколько цифр в целой части и каковы её первые цифры, не вычисляя само число.
2. **a)** Оценить следующее число по предыдущему, найти, между какими двумя целыми оно лежит, а затем прибавить оставшуюся дробь из правила простых и получить точное значение.
3. **a)** Часть этого описания опирается на его недоказанную догадку о простом числителе, а оценки величины и дробная часть стоят на твёрдой почве.

Задачи

1. Объясните своими словами, как можно знать первые цифры и количество цифр числа, слишком большого, чтобы его выписать.

Подсказка: Подумайте, что сообщает логарифм.

Ответ: Логарифм числа сообщает его величину: целая часть логарифма даёт количество цифр, а дробная — первые цифры. Если формула точно оценивает логарифм, вы узнаете и то и другое, ни разу не выписав число.

2. Чем полезно, что отношение последовательных чисел Бернулли быстро устанавливается на простом выражении?

Подсказка: Подумайте, как найти следующее число таблицы.

Ответ: Это позволяет оценить каждое новое число Бернулли по предыдущему достаточно точно, чтобы знать, между какими двумя целыми оно лежит. Поскольку оставшаяся дробь известна из правила простых, этого хватает, чтобы записать точное значение.

Общая закономерность и что сказали редакторы

К этому моменту через всю статью проходит одна закономерность. С одним котангенсом Рамануджан получал уравнения, которым нужны все прежние числа Бернулли; пара с двойником гасила половину членов; три кубических корня из единицы гасили два члена из каждых трёх. В последних двух параграфах он даёт этой закономерности имя и доводит её до предела.

$$B_2, B_4, B_6, B_8, \dots$$

ИНТЕРВАЛ 1 ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●

ИНТЕРВАЛ 2 ● ● ● ● ●

ИНТЕРВАЛ 3 ● ● ● ●

$$p\text{-th roots of } 1 \rightarrow p\text{-interval}$$

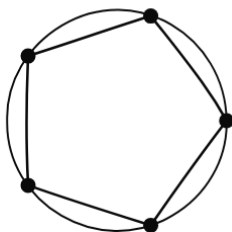


Одна закономерность, сита всё мельче

Эти результаты он называет формулами с интервалом один, два и три — по тому, как далеко друг от друга стоят выжившие числа Бернулли. И он формулирует общий рецепт: для любого числа p возьмите корни степени p из единицы, а при чётном p — из мнимой единицы, подмешайте их в котангенс — и вы получите формулы с интервалом p , каждая из которых сохраняет в своей нити лишь каждый p -й член семейства. Это как набор сит, каждое мельче предыдущего, раскладывающих одну и ту же кучу чисел по всё большему числу отдельных лотков.

Чтобы показать это в деле, он проводит случай с интервалом пять. Корни пятой степени из единицы приводят с собой золотое сечение — число около одной целой шестисот восемнадцати тысячных, которое встречается в подсолнухах, в числах Фибоначчи и в классической архитектуре. Формулы записаны с помощью последовательности целых чисел, построенной из золотого сечения, — близких родственников чисел Фибоначчи, — и каждая формула выделяет числа Бернулли, отстоящие друг от друга на десять номеров. Затем он набрасывает и случай с интервалом четыре, построенный на этот раз на квадратном корне из двух, и замечает, что похожие тождества с косинусами дают ещё множество других. Для сегодняшнего читателя урок — скорее в методе, чем в формулах: одна мысль, гашение членов с помощью корней из единицы, порождает целое семейство коротких путей — так один хитрый приём в программе может разом ускорить множество вычислений.

ИНТЕРВАЛ 5



$$\varphi \approx 1.618$$

1, 3, 4, 7, 11, ...



$$\sqrt{2} \rightarrow \text{four-interval}$$

ОДИН ПРИЁМ — МНОГО ПУТЕЙ

Пятиугольник и золотое сечение

На этом статья кончается, но книга добавляет последнее слово редакторов собрания статей Рамануджана, среди которых был и Харди, знавший его работу лучше всех. Их вердикт уважителен и откровенен. Статья интересна как образец самой ранней манеры Рамануджана, но её главные результаты уже были известны, а доказательства неполны. Правило для оставшихся дробей — это теорема Клаузена и фон Штаудта, а закономерность с нечётностью была известна Эйлеру. Из восьми его арифметических утверждений доказательства он наметил лишь для трёх, и эти доказательства зависят от утверждений о целых коэффициентах, которых он так и не доказал; ещё два — следствия, а три, включая утверждение о простом числителе и правило для знаменателей, высказаны лишь как гипотезы.

Редакторы также отмечают, что некоторые его выводы используют ряды, которые не сходятся, так что доводы в нынешнем виде несостоятельны.

РЕДАКТОРЫ, С ХАРДИ

ИТОГИ ИЗВЕСТНЫ, ДОКАЗ. НЕПОЛНЫ

КЛАУЗЕН — ШТАУДТ, ЭЙЛЕР

ДОКАЗ.?	СЛЕДСТВИЕ	ГИПОТЕЗА
●	●	●
●	●	●
●		●

× РЯДЫ РАСХОДЯТСЯ

Вердикт редакторов

Почему это всё же стоит читать? Потому что здесь виден математический ум в самом начале пути: самоучка без доступа к литературе заново открывает знаменитую теорему, находит быстрые вычислительные короткие пути и угадывает закономерности по данным с верным чутьём на то, какие из них важны. Несколько лет спустя, работая с Харди, Рамануджан добавит строгость, которой не хватает этой первой статье, и его поздние работы изменят теорию чисел. Этот курс прошёл за его

первой опубликованной статьёй от котангенса до вердикта редакторов; на этом он заканчивается.

ЗАЧЕМ ЧИТАТЬ?

**ОТКРЫТЬ ЗАНОВО
КОРОТКИЕ ПУТИ**

ДОГАДКИ

СТРОГОСТЬ

**САМОУЧКА
1911**

С ХАРДИ

КОРНИ ИЗ 1 → ТОНЬШЕ НИТИ

ИТОГИ ИЗВЕСТНЫ, ДОКАЗ. НЕПОЛНЫ

БЫСТРЫЕ МЕТОДЫ, СМЕЛЫЕ ДОГАДКИ

До строгости

Запомним

Рамануджан обобщает свой приём: корни степени p из единицы, подмешанные в котангенс, дают формулы с интервалом p , разбирающие числа Бернулли на всё более тонкие нити, — что полностью показано на случае с интервалом пять, построенном на золотом сечении.

Итоговая заметка редакторов говорит, что главные результаты статьи уже были известны, её доказательства неполны, а несколько арифметических утверждений — лишь гипотезы, одна из которых ложна. Остаётся живая картина самой ранней манеры Рамануджана: быстрые методы, заново открытые теоремы и смелые догадки — до той строгости, которой он научился позже.

Вопросы

1. Каков общий рецепт Рамануджана для формул с интервалом p ?
 - a. Взять корни степени p из единицы, а при чётном p — из мнимой единицы, и подмешать их в котангенс
 - b. Умножить котангенс на p
 - c. Взять p разных простых чисел
 - d. Разделить таблицу на p равных частей
2. Что входит в формулы с интервалом пять?

- a. Золотое сечение — через построенные из него целые числа
 - b. Только квадратный корень из двух
 - c. Число e
 - d. Одно лишь простое число пять
3. Каков вердикт редакторов о статье?
- a. Интересна как образец самой ранней манеры Рамануджана, но её главные результаты были известны, а доказательства неполны
 - b. Полное доказательство новых результатов
 - c. Целиком ложна
 - d. Нечитаема

Ответы

1. а) Для любого числа p возьмите корни степени p из единицы, а при чётном p — из мнимой единицы, подмешайте их в котангенс — и получите формулы с интервалом p .
2. а) Корни пятой степени из единицы приводят золотое сечение, а формулы записаны с помощью построенной из него последовательности целых чисел.
3. а) Статья интересна как образец самой ранней манеры Рамануджана, но её главные результаты уже были известны, а доказательства неполны.

Задачи

1. Объясните своими словами образ сит для формул с интервалом.

Подсказка: Подумайте, что каждое более мелкое сито делает с кучей чисел Бернулли.

Ответ: Каждая формула с интервалом сохраняет лишь числа Бернулли, стоящие на фиксированном расстоянии друг от друга, так что семейство раскладывается на отдельные нити. Более мелкое сито, из большего числа корней из единицы, делает нити тоньше, так что каждое новое число в нити зависит от меньшего числа прежних.

2. Почему статью с неполными доказательствами и несколькими ложными гипотезами всё же стоит изучать?

Подсказка: Подумайте, что она показывает о том, как делаются открытия в математике.

Ответ: Она показывает открытие в действии: быстрые методы, независимо открытую заново знаменитую теорему и смелые догадки по данным — одни верные, другие нет. Видя, какие догадки выжили и почему доказательства не дотягивают, учишься оценивать математические доводы, а ещё видишь отправную точку математика, чьи поздние работы, сделанные строгими вместе с Харди, изменили теорию чисел.